

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES DE BANDA LARGA EM ESTRUTURAS COMPLEXAS  
POR NEUTRALIZADORES VISCOELÁSTICOS**

**TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR ENGENHEIRO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**AUTOR: CARLOS ALBERTO BAVASTRI**

**FLORIANÓPOLIS, AGOSTO DE 1997.**

**REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES DE BANDA LARGA EM ESTRUTURAS COMPLEXAS  
POR NEUTRALIZADORES VISCOELÁSTICOS**

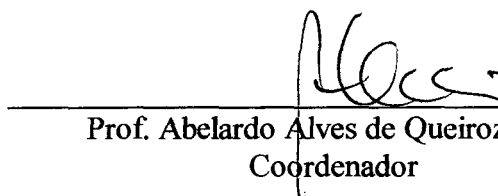
**CARLOS ALBERTO BAVASTRI**

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
DOUTOR ENGENHEIRO**

**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA (ÁREA DE CONCENTRAÇÃO  
VIBRAÇÕES E RUÍDO) E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**



Prof. José João de Espíndola, PhD  
Orientador



Prof. Abelardo Alves de Queiroz, PhD  
Coordenador

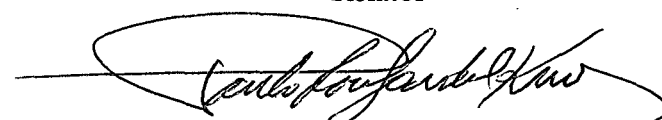
BANCA EXAMINADORA



Prof. José João de Espíndola, PhD  
Presidente



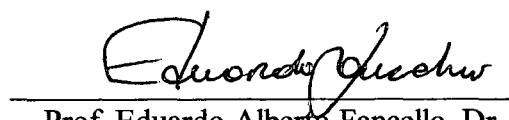
Prof. Hans Ingo Weber, Dr. Ing.  
Relator



Prof. Paulo Roberto Gardel Kurka, PhD



Prof. Nelson Back, PhD



Prof. Eduardo Alberto Fancello, Dr. Sc.



**A meus pais, a minha mulher e a  
minha filha (Akemy).**

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Espíndola, pela excelente orientação, pela experiência transmitida durante todo este tempo e, sobre tudo, pela amizade. A sua mulher, Beth, pela amizade.
- A minha mulher e filha (Bety e Akemy) que durante todo este trabalho tiveram a paciência, amor e compreensão infinita, fundamentais para alcançar esta meta tão importante.
- A Elsa e Carlos, meus pais, pelo amor que sempre me deram, pelo apoio incessante para continuar a minha carreira, apesar da distância e da saudade infinita que senti em todo este tempo.
- A meus irmãos, sobrinhos, primos e tios, tão longe e tão perto do meu coração ao mesmo tempo.
- A Jussepe, Amabile e Clara, pelo amor e a amizade.
- A Paulo, Mariza Cuca e Paula. Por ter-me acolhido nos primeiros momentos aqui no Brasil.
- Aos companheiros e amigos de trabalho: Joseval, Orlando, Acir, Leonardo, Chetu, Hilton, Eduardo, Sérgio, Luís, Adriana, Takao, Luciano, Gustavo, Stela, Fu, Pacheco, pelo apoio e colaboração. A Renato e André, pelas vivências.
- A Hugo, Luís, Miguel, Raul, Flaco, Cato, Martin, Ricardo, Jorge e Juan, pela amizade.
- Aos companheiros da UNC, pelo esforço realizado para que possa concluir meus estudos, em especial a Juan Perez Ipiña, pela sua influência na pesquisa, apoio, amizade e conselhos.
- Aos professores do Laboratório de Vibrações e Acústica, pela amizade.
- A Eduardo, pela ajuda na simulação numérica através de elementos finitos no cálculo da distribuição de temperatura do neutralizador dinâmico.
- Ao laboratório de Máquinas Ferramentas (LABMAT), pela construção das lâminas metálicas das vigas sanduíche.
- À Fundação CERTI, pelo excelente trabalho na construção das partes dos neutralizadores, como também empréstimo de equipamentos para os ensaios experimentais.
- Ao Lauro (LMPT), pela ajuda desinteressada na construção dos termopares, para medir a temperatura dos elastômeros e pelo empréstimo de equipamentos nos testes experimentais.
- Ao governo brasileiro em nome da CAPES, pelo apoio financeiro no decorrer deste trabalho.
- À Universidade Nacional del Comahue, por permitir realizar esta especialização e ter apoiado financeiramente. Aos amigos e colegas do laboratório de Mecânica Aplicada, pela confiança e apoio.

## ÍNDICE

1 - CAPÍTULO I ( <i>Introdução</i> )	
1.1 - INTRODUÇÃO	1
2 - CAPÍTULO II ( <i>Modelo Viscoelástico para Neutralizadores Dinâmicos - Revisão</i> )	
2.1 - Propriedades Dinâmicas dos Materiais Viscoelásticos	7
2.2 - Variação das Características dos Materiais Viscoelásticos em Função da Frequência e da Temperatura	11
2.2.1- Temperatura e Frequência de Transição	11
2.3 - Sistemas de um Grau de Liberdade	13
2.3.1- Função Resposta em Frequência	13
2.3.2- Transmissibilidade	17
2.4 - Sistema Composto	17
2.5 - Neutralizador Dinâmico	22
2.5.1- Técnica dos Pontos Fixos	23
2.5.2- Utilizando Técnicas de Otimização Não Linear	28
3 - CAPÍTULO III ( <i>Parâmetros Equivalentes Generalizados - Conceitos e Aplicações</i> )	
3.1 - Quantidades Equivalentes Generalizadas para um Neutralizador Simples	32
3.1.1- Neutralizador Simples - Modelo Viscoso	35
3.1.2- Neutralizador Simples - Modelo Viscoelástico	35
3.2 - Sistemas Lineares com Múltiplos Graus de Liberdade	36
3.2.1- Modelo Viscoso	36
3.2.2- Modelo Histerético	41
3.3 - Neutralizadores Dinâmicos Fixados em Sistemas Primários	
Complexos - Modelo Viscoso Proporcional	49
3.3.1- Truncamento	50
3.3.2- Tratamento Modo a Modo	52
4 - CAPÍTULO IV ( <i>Técnicas de Otimização Não Linear</i> )	
4.1 - Problema de Otimização Não Linear com Restrições	56
4.2 - Transformação de um Problema com Restrições para um Equivalente sem Restrições	58
4.2.1 - Métodos das Penalidades	58
4.2.2 - Métodos das Barreiras	59
4.2.3 - Vantagens e Desvantagens dos Métodos das Penalidades e Barreiras	59
4.2.4 - Casos Particulares	60
4.3 - Direção de Busca de um Problema de Otimização Não Linear	61
4.3.1 - Métodos que Não Utilizam Informação da Derivada	61
4.3.2 - Métodos que Utilizam Informação da Derivada	63
4.4 - Busca Unidirecional	67

4.4.1 - Métodos que Não Utilizam Informação da Derivada	68
4.4.2 - Métodos que Utilizam Informação da Derivada	68
5 - CAPÍTULO V ( <i>Função Objetivo, Variável de Projeto - Simulação Numérica</i> )	
5.1 - Variável de Projeto	70
5.1.1 - Neutralizador Tipo Viscoso	70
5.1.2 - Neutralizador Tipo Viscoelástico	71
5.2 - Função Objetivo	71
5.3 - Esquema Básico na Procura dos Parâmetros Ótimos dos Neutralizadores	74
5.4 - Simulação Numérica	76
5.4.1 - Parâmetros Modais da Estrutura	78
5.4.2 - Funções Objetivos	79
5.4.3 - Vetor de Projeto	79
5.4.4 - Técnicas de Otimização	79
5.4.5 - Dados Adicionais no Processo de Otimização	79
5.4.6 - Resultado 1	80
5.4.7 - Resultado 2	80
5.4.8 - Resultado 3	83
5.4.9 - Resultado 4	85
5.5 - Conclusões	86
6 - CAPÍTULO VI ( <i>Exemplo Numérico - Prático. Corroboração de Resultados</i> )	
6.1 - Parâmetros Modais do Sistema Primário	88
6.1.1 - Medições das Respostas em Frequência do Sistema Primário	89
6.1.2 - Identificação dos Parâmetros Modais do Sistema Primário	89
6.2 - Cálculo dos Neutralizadores Dinâmicos Atuando em Banda Larga	95
6.2.1 - Variável de Projeto e Função Objetivo	95
6.2.2 - Método de Programação Não Linear	96
6.2.3 - Localização dos Neutralizadores	96
6.2.4 - Dados Adicionais	96
6.2.5 - Resultado Teórico 1	97
6.2.6 - Resultado Teórico 2	97
6.2.7 - Resultado Teórico 3	101
6.3 - Ensaio Experimental	103
6.3.1 - Construção dos Neutralizadores	103
6.3.2 - Sistema Composto: Montagem e Resposta em Frequência	111
6.4 - Comparação entre os Resultados Numéricos e Experimentais	111
7 - CAPÍTULO VII ( <i>Influência da Temperatura nos Neutralizadores Viscoelásticos</i> )	
7.1 - Influência da Temperatura sobre os Neutralizadores Viscoelásticos	113
7.1.1 - Frequência Natural dos Neutralizadores em Função da Temperatura Ambiente	113
7.1.2 - Variação da Temperatura do Neutralizador Devida à Dissipação de Calor	116
7.1.2.1 - Medições Experimentais	117

7.1.2.2 - Predição da Temperatura Interna através do Modelo de Elementos Finitos	120
<b>8 - CAPÍTULO VIII</b> <i>(Comentários Finais, Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros)</i>	
8.1 - Comentários Finais	122
8.2 - Conclusões	125
8.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros	126
Anexo 1 <i>(Quantidades Equivalentes Generalizadas de um Neutralizador Simples)</i>	130
Anexo 2 <i>(Comparação de sistemas Simples, Amortecimento Viscoso e Viscoelástico)</i>	134
Anexo 3 <i>(Levantamento das Características Dinâmicas de um Material Viscoelástico)</i>	137
Anexo 4 <i>(Arquivo de Comandos do Ansys 5.0 - Cálculo da Distribuição de Temperatura no neutralizador em regimen permanente)</i>	167

## SIMBOLOGIA

## Dinâmica de Estruturas

$A$	Área cisalhada de um elemento simples $[m^2]$ .
$h$	Altura entre as áreas cisalhadas $[m]$ .
$B$	Módulo volumétrico de um material qualquer $[Nm^{-2}]$ .
$G$	Módulo de cisalhamento de um material qualquer $[Nm^{-2}]$ .
$\nu$	Relação de Poisson [adimensional].
$\bar{K}(\Omega)$	Rigidez complexa de um material elastomérico $[Nm^{-2}]$ .
$L$	Fator de forma de um elemento. Depende do tipo de excitação e da geometria $[m]$ .
$\theta$	Temperatura $[K]$ .
$\bar{G}(\Omega)$	Módulo de cisalhamento complexo de um material viscoelástico $[Nm^{-2}]$ .
$G(\Omega)$	Parte real do módulo de cisalhamento $[Nm^{-2}]$ .
$x(t)$	Deslocamento da massa de um sistema de um grau de liberdade $[m]$ .
$X(\Omega)$	Transformada de Fourier de $x(t)$ .
$f(t)$	Excitação sobre o sistema primário ou estrutura. Para um sistema de múltiplos graus de liberdade é um vetor $(n \times 1)$ . Para um sistema simples é um escalar $[N]$ .
$F(\Omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$ .
$X_b(\Omega)$	Deslocamento da base de um sistema de um grau de liberdade, no domínio da frequência $[m]$ .
$F_t(\Omega)$	Excitação transmitida à base de um sistema simples, no domínio da frequência.
$m$	Massa de um sistema simples (um grau de liberdade) $[Kg]$ .
$\Omega$	Variável frequência $[seg^{-1}]$ .
$H(\Omega)$	Função resposta em frequência em forma geral. Se a resposta é o deslocamento recebe o nome de receptância $[m N^{-1}]$ . Se o sistema analisado é de múltiplos graus de liberdade é uma matriz $(n \times n)$ . Às vezes é comum expressar esta função em forma adimensional.
$\Omega_n$	Frequência natural de um sistema de um grau de liberdade.
$r(\Omega)$	$K(\Omega) / K(\Omega_n) = G(\Omega) / G(\Omega_n)$ .
$\eta(\Omega)$	Fator de perda de um material viscoelástico.
$\xi$	Razão de amortecimento viscoso $[c / c_c]$ .
$c$	Constante de amortecimento viscoso $[N seg m^{-1}]$ .
$c_c$	Constante crítica de amortecimento viscoso.
$T$	Transmissibilidade.
$X_a(\Omega)$	Deslocamento da massa para um sistema simples (neutralizador) $[m]$ .
$G_a(\Omega)$	Módulo de cisalhamento do material viscoelástico que faz parte do neutralizador.
$Q(\Omega)$	Coordenada generalizada do sistema primário, se o sistema primário é de múltiplos graus de liberdade se converte em um vetor de ordem $(n \times 1)$ .

$m_a$	Massa de um neutralizador simples $[Kg]$ .
$\eta_a$	Fator de perda do material viscoelástico de um neutralizador simples.
$\alpha$	$\Omega_a / \Omega_n$ .
$\Omega_a$	Frequência natural do neutralizador $[seg^{-1}]$ .
$\varepsilon$	$\Omega / \Omega_a$ .
$\beta$	$\Omega / \Omega_n$ .
$r_a(\Omega)$	$G_a(\Omega) / G_a(\Omega_a)$ .
$\mu$	$m_a / m$ .
$H_0(\Omega)$	Reposta em frequência medida na massa do sistema primário para $\eta_a = 0$ .
$H_\infty(\Omega)$	Reposta em frequência medida na massa do sistema primário para $\eta_a = \infty$ .
$\Omega_A$	Frequência correspondente ao ponto fixo inferior $[seg^{-1}]$ .
$\Omega_B$	Frequência correspondente ao ponto fixo superior $[seg^{-1}]$ .
$\Omega_{a\,ot}$	Frequência ótima do neutralizador dinâmico.
$\alpha_{a\,ot}$	$\Omega_{a\,ot} / \Omega_n$ .
$\eta_{a\,ot}$	Fator de perda ótimo do neutralizador.
$m_{a\,ot}$	Massa do neutralizador ótima.
$Z_a(\Omega)$	Impedância dinâmica de um neutralizador simples $[N\,seg\,m^{-1}]$ .
$M_a(\Omega)$	Massa dinâmica de um neutralizador simples $[Kg]$ .
$m_e(\Omega)$	Massa equivalente generalizada.
$c_e(\Omega)$	Amortecimento equivalente generalizado.
$M$	Matriz de distribuição de massa do sistema primário ou estrutura $(n \times n)$ .
$C$	Matriz de distribuição de amortecimento do sistema primário ou estrutura $(n \times n)$ .
$K$	Matriz de distribuição de rigidez do sistema primário ou estrutura $(n \times n)$ .
$q(t)$	Coordenadas generalizadas (físicas) do sistema primário ou estrutura. Para sistemas de múltiplos graus de liberdade é um vetor $(n \times 1)$ .
$f(t)$	Excitação sobre o sistema primário. Para sistemas de múltiplos graus de liberdade é um vetor $(n \times 1)$ $[N]$ .
$s_i$	i-ésimo autovalor do sistema primário com múltiplos graus de liberdade.
$\phi_i$	i-ésimo autovetor correspondente ao i-ésimo autovalor.
$\delta_i$	Parte real do i-ésimo autovalor.
$\nu_i$	Parte imaginária do i-ésimo autovalor.
$\Omega_i$	i-ésima frequência natural não amortecida do sistema primário.
$m_r$	Massa modal.
$k_r$	Rigidez modal.
$c_r$	Coefficiente de amortecimento viscoso modal.
$\xi_r$	Relação de amortecimento modal $(c_r / c_{cr})$ .
$c_{cr}$	Coefficiente de amortecimento viscoso crítico modal.

$\Phi$	Matriz modal formada pelos autovetores do sistema primário.
$\Psi$	Matriz modal ortonormalizada através da matriz de massa modal.
$P(\Omega)$	Coordenadas principais do sistema primário no domínio da frequência
$N(\Omega)$	Excitação no espaço modal.
$D_0$	Matriz de resposta em frequência do sistema primário no espaço modal (matriz desacoplada).
$\alpha(\Omega)$	Matriz de resposta em frequência (receptância) no espaço físico.
$\alpha_{k,s}(\Omega)$	Coefficiente $k,s$ da matriz resposta em frequência $\alpha(\Omega)$ .
$E_d$	Energia dissipada por ciclo de um sistema físico qualquer.
$\pi$	Constante = 3.14159265358979.
$h(\Omega)$	Amortecimento histerético $[N\ m^{-1}]$ .
$H$	Matriz de amortecimento histerético.
$\eta$	Matriz de perda do sistema primário modelado com amortecimento histerético. Seus coeficientes são denominados fatores de perda.
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker.
$^j A_{k,s}$	$k,s$ -ésima constante modal associada ao $j$ -ésimo modo.
sgn	Sinal "Signum".
$\tilde{M}$	Matriz de massa do sistema composto (primário + neutralizadores).
$\tilde{C}$	Matriz de amortecimento do sistema composto.
$\hat{\Phi}$	Matriz modal truncada contendo $\hat{n}$ modos, com $\hat{n} \ll n$ . Seu tamanho é $(n \times \hat{n})$ .
$\hat{P}(\Omega)$	Coordenadas principais no subespaço modal $(\hat{n} \times 1)$ .
$\hat{M}_A(\Omega)$	Matriz de massa equivalente no subespaço modal $(\hat{n} \times \hat{n})$ .
$\hat{C}_A(\Omega)$	Matriz de amortecimento equivalente no subespaço modal $(\hat{n} \times \hat{n})$ .
$\hat{N}(\Omega)$	Vetor de excitação no subespaço modal $(\hat{n} \times 1)$ .
$\hat{D}_0$	Matriz de resposta em frequência do sistema primário no subespaço modal.
$\hat{D}$	Matriz acoplada contendo informação das características do sistema composto (sistema primário + neutralizadores) no subespaço modal.
$\hat{n}$	Modos computados $(\hat{n} \ll n)$ .
$n$	Número de graus de liberdade do um sistema linear qualquer.
$p$	Número de neutralizadores utilizados para reduzir as vibrações da estrutura.
$\Phi^i$	Matriz formada pelos coeficientes dos autovetores no cálculo das massas dos neutralizadores.
$M_a$	Vetor de massas dos $p$ neutralizadores distintos.
$\nu$	Vetor de coeficientes $\mu_j$ , com $j = 1 \text{ a } p$ .
$\mu_j$	$m_a / m_j$ . Relação entre a massa do neutralizador e a massa modal.
$V_i$	Potencial elétrico medido pela diferença de temperaturas entre o corpo em repouso e a referência $[V]$ .
$V_f$	Potencial elétrico medido em regime permanente.
$\alpha_{Co}$	Coefficiente do material Constantan. Aumento do potencial elétrico para cada grau Celsius de aumento da temperatura $[V\ ^\circ C^{-1}]$ .



$\alpha_{Cu}$	Coefficiente do material Cobre. Aumento do potencial elétrico para cada grau Celsius de aumento da temperatura.
$T_f$	Temperatura final no seno do material viscoelástico do neutralizador [K].
$T_i$	Temperatura inicial no seno do material viscoelástico do neutralizador.
$T_r$	Temperatura de referência (água).
$\Delta V$	Diferença de potencial entre o estado final e inicial.
$V_1^0$	Potencial inicial do termopar 1.
$V_1^1$	Potencial final do termopar 1.
$V_2^0$	Potencial inicial do termopar 2.
$V_2^1$	Potencial final do termopar 2.

### Técnicas de Otimização Não Linear

$f(x)$	$f : R^{nd} \rightarrow R$ . Função objetivo do problema de otimização não linear com restrições.
$fobj(x)$	Função objetivo do problema de otimização não linear sem restrições uma vez aplicado o método das penalidades.
$x$	Vetor de projeto. Variável no processo de otimização não linear.
$m_i$	Número de restrições de igualdade. Neste trabalho $m_i = 0$ .
$m_{i+1}$ a $l$	Número de restrições de desigualdade.
$h_i$	i-ésima restrição de igualdade.
$g_j$	j-ésima restrição de desigualdade.
$nd$	Dimensão do vetor $x$ .
$R^{nd}$	Espaço real $nd$ dimensional.
$k$	Número de iteração.
$\Delta x$	Incremento da variável $x$ .
$\lambda_k$	Escalar utilizado na procura do ótimo unidirecional, na iteração $k$ .
$d$	Direção de busca no espaço $R^{nd}$ .
$\nabla f(x)$	Vetor gradiente no ponto $x$ .
$H(x)$	Matriz Hessiana no ponto $x$ .
$x^*$	Ponto ótimo.
$x_j^L$	Limite inferior da j-ésima componente de $x$ .
$x_j^H$	Limite superior da j-ésima componente de $x$ .
$R_K$	Coefficiente que controla a penalidade das restrições que não são satisfeitas.
$n_1$	Expoente da quadrática no método da penalidade externa.
$e_i$	i-ésimo eixo básico.
$q(x)$	Quadrática ajustada no ponto $x$ através da série de Taylor.
$C_1$	Coefficiente constante $\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}\right)$ para levar as componentes da variável $x$ na mesma ordem de grandezas.
$\Omega_1$	Frequência inferior da banda de análise.
$\Omega_2$	Frequência superior da banda de análise.

$L_v$	Comprimento da viga sanduíche $[m]$ .
$E$	Módulo de Young $[N\ m^{-2}]$ .
$I$	Momento de área $[m^4]$ .
$x_0$	Ponto inicial arbitrário no processo de otimização não linear.

### Símbolos Adicionais

$diag( )$	Significa Matriz diagonal.
$x^T$	A letra $T$ superescrita em um vetor, indica a transposta do mesmo.
$\  \ $	Norma euclidiana de um vetor ou matriz.
$  $	Módulo de um vetor.
TPNL	Abreviação de técnicas de programação não linear.
PF	Abreviação de técnicas dos pontos fixos.
FRF	Abreviação de função resposta em frequência.
FRFs	Abreviação de funções resposta em frequência.
*	Fora do contexto de otimização não linear significa o complexo conjugado de um número complexo. No processo de otimização não linear refere-se ao ponto ótimo.
$\Re( )$	Parte real de um número complexo.
$\Im( )$	Parte imaginária de um número complexo.
$I$	Matriz identidade.
$i$	$\sqrt{-1}$ .

## RESUMO

Neutralizadores dinâmicos, aplicados ao controle (redução) de vibrações de uma estrutura, têm sido uma importante ferramenta para o engenheiro durante muitos anos. Dispositivos simples que, fixados convenientemente em uma estrutura, reduzem suas vibrações de forma efetiva e com um custo relativamente baixo. Até o presente, todas as metodologias propostas para a redução de vibração, via neutralizadores, foram desenvolvidas para casos particulares de estruturas primárias ou para a redução modo a modo.

Este trabalho trata de uma formulação absolutamente geral para o estudo de redução de vibração, através de neutralizadores simples, sobre uma estrutura linear de qualquer complexidade. O uso de conceitos de parâmetros equivalentes generalizados juntamente com técnicas de otimização não linear, permitem determinar os parâmetros ótimos de  $p$  neutralizadores, fixados na estrutura a controlar. A metodologia proposta modifica a resposta do sistema primário em uma faixa de frequência utilizando um número reduzido de equações. Este sistema de equações reduzido depende apenas dos modos que estão presentes na banda de análise. Precisa-se, para isto, conhecer as características modais da estrutura primária obtidas, por exemplo, através de técnicas de elementos finitos ou através de identificação de parâmetros. Assim, além de geral, é uma metodologia que emprega, para qualquer problema, um mínimo tempo computacional no cálculo da redução de vibrações em banda larga.

Dois exemplos, ilustrando o seu desempenho, são apresentados: uma viga engastada livre com um modo na faixa de frequência de análise, e uma chapa de aço simplesmente apoiada em uma espuma de poliuretano. No segundo exemplo, a banda considerada contém o terceiro e quarto modo. A parte experimental pode ser encontrada neste trabalho para corroborar os diferentes conceitos estudados.

## ABSTRACT

For many decades vibration neutralizers are recognized as important devices for vibration abatement of structures.

They are simple devices that, once conveniently fixed upon a structure, reduce vibrations and sound radiation in an efficient and cost effective way.

So far all theory of vibration reduction with neutralizers have been developed for specific (and reasonably simple) structures. For another structure, or even the same one, but with different neutralizers applications, all the length mathematics had to be reviewed.

This work sets out from a completely general theory based on generalized quantities for vibration neutralizers, developed by Espíndola and Silva (1992), upon which techniques of non linear optimization are herein applied.

That theory takes as raw material the modal model of the primary structure (i.e., the structure without neutralizers), which can be obtained through a finite element code, or an experimental parameter identification technique .

As a numerical example, a vibration treatment of a real damped primary structure is performed.

Frequency responses of the structure before and after treatment are computed and compared.

Viscoelastic neutralizers are constructed and fixed to the structure.

Measurements are performed and the experimental results compared with those obtained numerically.

The excellent agreement between experimental and numerical results are pointed out.

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

## CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO

### 1.1 - Introdução

Quando sobre um sistema mecânico atua uma força cujo espectro apresenta valores significativos em uma certa faixa de frequência e nesta região de altos valores espectrais situam-se frequências naturais do sistema, este pode responder com vibrações excessivas.

Algumas técnicas básicas utilizadas para reduzir essas vibrações a níveis aceitáveis (Espíndola, 1987) são:

- atuar sobre a excitação, reduzindo sua amplitude e/ou alterando o espectro;
- atuar sobre a estrutura, seja pela variação de rigidez, massa, ou introduzindo amortecimento;
- fixar um, ou mais sistemas secundários ao sistema vibrante (também conhecido como sistema principal, sistema primário ou estrutura), cuja vibração deseja-se reduzir.

Ao sistema secundário dá-se o nome de neutralizador dinâmico de vibrações ou absorvedor de vibrações. Estes são fixados ao sistema principal, ou estrutura, ou sistema primário, com o propósito de reduzir ou controlar as vibrações, aplicando forças de reação e/ou dissipação da energia vibratória.

A primeira pessoa a aplicar dispositivos para suprimir vibrações foi Frahm (1911). Durante anos, vários tipos de neutralizadores dinâmicos foram desenvolvidos, assim como vários modelos matemáticos para prever o seu comportamento.

O modelo mais simples, estudado primeiramente por Osmondroyd e Den Hartog (1956), e apresentado por vários autores, tais como Harris e Crede (1976), Hunt (1979), Snowdon (1968), foi um neutralizador dinâmico com um grau de liberdade, aplicado a um sistema primário também com um grau de liberdade. Nesta análise considerou-se o sistema primário sem amortecimento e, o neutralizador, com e sem amortecimento viscoso. O propósito foi achar os parâmetros ótimos do sistema secundário (massa, rigidez e amortecimento viscoso) para minimizar a vibração no sistema primário.

Trabalhando em uma banda estreita (faixa estreita ao redor da frequência natural do sistema primário), pode-se demonstrar (Den Hartog, 1956) que a vibração do sistema principal tende para zero quando a frequência natural do neutralizador coincide com aquela do sistema

primário. Esta escolha para a frequência do neutralizador, conhecida como de sintonização, altera a resposta do sistema composto (sistema primário + neutralizador), introduzindo duas frequências naturais novas, ao redor da frequência natural do sistema primário. Este tipo de neutralizador, que pode ser denominado  $[M K]$ , possui apenas elementos que armazenam energia inercial e elástica, não existindo nenhum elemento que dissipe energia. Duas dificuldades são encontradas através desta solução: a vibração no neutralizador será extremamente elevada, produzindo a possível ruptura do mesmo (fadiga); grandes amplitudes de vibrações podem ser encontradas no sistema primário se a frequência de excitação variar, podendo coincidir com uma das frequências naturais do sistema composto (ressonância). Na prática procura-se introduzir amortecimento no neutralizador para evitar esses inconvenientes.

Pelo exposto no parágrafo anterior, uma alternativa é trabalhar em banda larga (faixa de frequência ampla) com modelos de neutralizadores não só contendo elementos de massa e de mola, mas também, amortecimento. Quando o modelo é viscoso, o neutralizador é conhecido como  $[M C K]$ .

O método clássico de neutralizadores dinâmicos, trabalhando em banda larga, é denominado Método dos Pontos Fixos (considerando o sistema primário sem amortecimento, as diferentes respostas do sistema composto, para diferentes amortecimentos do sistema secundário, passam sempre através de dois pontos). Segundo Snowdon (1968): “A sintonização dos neutralizadores dinâmicos é mais efetiva quando os máximos valores da resposta do sistema primário são iguais e coincidem com os pontos fixos. Este valor de resposta será excedido para qualquer sintonização do neutralizador diferente daquela”.

O modelo  $[M C K]$  é uma teoria limitada em seu escopo e, obviamente, inadequada para aplicações a sistemas primários complexos, onde vários modos podem contribuir de forma considerável para a resposta estrutural (Silva, 1991). Assim, neste trabalho, esse modelo será utilizado apenas para fins comparativos. Alguns pesquisadores, contudo, estudaram aplicações de tais neutralizadores em estruturas mais complexas, na tentativa de ampliar e generalizar esta teoria. Citando alguns exemplos, análises de neutralizadores dinâmicos fixados a vigas uniformes foram desenvolvidas por Young (1952) e Snowdon (1966).

Um outro modelo matemático usado para representar o neutralizador é o modelo viscoelástico. Neste, uma peça de material viscoelástico substitui ambos, mola e amortecedor viscoso. Snowdon (1959) apresenta, pela primeira vez, a análise de um neutralizador viscoelástico

de um grau de liberdade, fixo em um sistema de um grau de liberdade, sem amortecimento qualquer.

Vários trabalhos sobre a sintonização dos neutralizadores dinâmicos, aplicados ao controle de vibração foram realizados nos últimos anos, fazendo uma análise do sistema composto (sistema primário + neutralizador). Entre eles citam-se: Asami, et al. (1993), Asami et al. (1991), Jolly e Sun (1994), Rossi et al. (1993), Wang e Cheng (1989), Wharburton e Ayorinde (1980), Yamaura et al. (1993), Zhang et al. (1990). Trabalhos teóricos sobre aplicações de neutralizadores dinâmicos para sistemas de um e dois graus de liberdade podem ser encontrados em: Ayorinde e Wharburton (1980), Kaljevic et al. (1993), Kunieda et al. (1987), Özgüven e Çandir (1986), Peterson (1979), Yamaguchi et al. (1993). Tais análises fazem uma estimativa da redução de vibração provocada pela utilização de neutralizadores dinâmicos, seguindo várias estratégias diferentes.

Segundo Sun (1995): “ Apesar de todo este esforço, entretanto, não existe um modelo geral para o estudo completo de neutralizadores dinâmicos para sistemas geometricamente complexos”.

Contudo, Espíndola e Silva (1992), propõem uma generalização ao problema de redução de vibrações através de neutralizadores dinâmicos pela via modal. Introduzindo o conceito de parâmetros equivalentes generalizados para neutralizadores viscosos e viscoelásticos, eles demonstram que se podem escrever as **equações do sistema composto em termos das coordenadas generalizadas do sistema primário, apenas**. Este fato é crucial. Embora com a adição de novos graus de liberdade, devido à fixação dos neutralizadores, o sistema composto é ainda descrito em termos dos mesmos graus de liberdade (coordenadas generalizadas) do sistema primário. Desta forma, o sistema composto pode ser modelado no espaço modal, através da transformação de coordenadas generalizadas em coordenadas principais. Para isto, é necessário o conhecimento dos parâmetros modais do sistema primário, que podem ser obtidos pela via numérica ou pela identificação de parâmetros modais de curvas obtidas experimentalmente. Com as equações escritas em coordenadas principais, podem-se reter apenas aquelas correspondentes à faixa de frequências onde o problema (alta resposta) reside. Em outras palavras, passa-se a trabalhar em um subespaço modal, com um mínimo de equações. A partir daí, dois caminhos podem ser seguidos:

a) desconsiderar o acoplamento das equações modais e projetar os neutralizadores, para cada modo, usando-se a técnica de Den Hartog (1956) para um grau de liberdade. Neste

izado



caso uma interpretação adequada da razão de massas (massa do neutralizador / massa sistema primário) é feita. Esta análise foi seguida por Silva (1991).

b) Tomar o subsistema de equações em coordenadas principais e, sobre ele, aplicar técnicas de otimização não linear para determinar os parâmetros ótimos dos neutralizadores. A análise, neste caso, seria feita em uma faixa de frequência e, não mais, modo a modo.

Técnicas de otimização não linear, aplicadas a neutralizadores, já foram utilizadas anteriormente com uma formulação no espaço físico. O exemplo típico é o trabalho de Kitis (1983), apresentando um método numérico para minimizar a resposta vibratória de um sistema de múltiplos graus de liberdade, em uma faixa de frequência. Para isto, Kitis (1983) realiza uma otimização do cálculo numérico, reduzindo o tempo de análise estrutural, utilizando uma técnica de reavaliação, sob uma **estrutura particular como uma viga engastada - livre**. Mas, se o sistema for outro deve-se procurar, se existir, uma outra forma de otimizar o tempo de análise estrutural pois, no caso geral, usando a teoria clássica para sistemas lineares com  $n$  graus de liberdade do sistema primário e  $p$  neutralizadores, **ficariam  $n + p$  equações** a serem consideradas. Isto leva a um método numericamente penoso se aplicado a um algoritmo já que, em cada iteração e para cada frequência as matrizes ampliadas  $[M]$ ,  $[K]$  e  $[C]$  têm de ser computadas. Importante destacar que pode-se trabalhar com sistemas que foram modelados pelas técnicas de elementos finitos, com mil (1000) ou mais graus de liberdade e vários neutralizadores.

Introduzindo o mesmo conceito de parâmetros equivalentes generalizados, proposto por Espíndola e Silva (1992), na análise modo a modo, ao invés de usar  $n + p$  equações para achar os parâmetros ótimos dos neutralizadores, utilizou-se, neste trabalho, um número de equações bem reduzido. Este número estará relacionado aos modos que estão dentro da faixa de frequência de interesse, mais a influência dos modos fora da mesma. Esta influência é considerada tomando-se os resíduos inferior e superior, Allemang e Brown (1987), Ewins (1984), ou introduzindo uns poucos modos antes e depois da faixa de frequência de análise.

O objetivo deste trabalho é aplicar esta teoria geral na elaboração de um algoritmo para a otimização de neutralizadores dinâmicos, com o propósito de minimizar a resposta de uma estrutura dinâmica qualquer (geometricamente complexa), linear, relaxada e invariante no tempo, dentro de uma faixa de frequência.

A formulação do sistema composto é feita em termos das coordenadas generalizadas do sistema primário devido à introdução, como anteriormente mencionado, do conceito de parâmetros equivalentes generalizados. Posteriormente faz-se uma transformação das

coordenadas generalizadas, através da matriz de autovetores do sistema primário, para as coordenadas principais. No espaço modal, com um número mínimo de equações, aplicam-se conceitos de otimização não linear para a sintonização dos neutralizadores. Para aplicar esta teoria, precisa-se de um mínimo conhecimento sobre a teoria modal de sistemas lineares de múltiplos graus de liberdade.

Serão utilizados modelo viscoso e viscoelástico para o neutralizador e, modelo viscoso e histerético para sistema primário. O modelo viscoso será utilizado para fins comparativos. O modelo viscoelástico é usado em forma geral e os seus resultados numéricos e experimentais são comparados.

No capítulo II, faz-se a revisão do modelo viscoelástico aplicado a sistemas dinâmicos. Serão apresentados sistemas de um e dois graus de liberdade de forma geral. Introduz-se o conceito básico de neutralizador dinâmico viscoelástico e duas técnicas serão apresentadas para a sintonização dos mesmos: uma, a revisão sobre a técnica dos pontos fixos e a outra, utilizando técnicas de otimização não linear. Mostra-se, nesta última, a generalidade do método para a sintonização dos neutralizadores.

No capítulo III, uma revisão aos conceitos de parâmetros equivalentes generalizados, para neutralizador simples, será realizada. Mostra-se a importância destes parâmetros quando introduzidos no sistema composto (sistema primário + neutralizadores). Será realizada uma revisão sobre sistemas lineares com múltiplos graus de liberdade, modelo viscoso e viscoso proporcional e introduz-se o modelo histerético para o sistema primário. Este desenvolvimento matemático servirá como base para o estudo de redução de vibração através de neutralizadores dinâmicos. Propõe-se uma formulação simples para a fixação das massas dos neutralizadores.

No capítulo IV, algumas técnicas de otimização não linear serão introduzidas, uma vez que serão utilizadas no processo da procura dos parâmetros ótimos dos neutralizadores. Vantagens e desvantagens destas técnicas serão apresentadas e discutidas.

No capítulo V, define-se a variável de projeto, função objetivo e restrições de desigualdade para resolver o problema de otimização não linear deste trabalho. Várias funções serão propostas, discutindo-se as suas vantagens e desvantagens. Uma escolha da variável de projeto é introduzida, chegando-se à mais adequada para cada modelo de neutralizador. Na saída do processo de otimização será encontrado um ponto ótimo (variável de projeto ótima) que representará, de alguma forma, os parâmetros dos neutralizadores. Uma simulação numérica, aplicando os conceitos mostrados até aqui, será apresentada. Resultados de respostas em

freqüência do sistema primário e do sistema composto com neutralizador ótimo, mostrará a eficácia desses dispositivos, quando calculados através metodologia proposta neste trabalho. Realiza-se um estudo sobre a influência do amortecimento do sistema primário, na efetividade da redução da vibração por neutralizador dinâmico.

No capítulo VI é apresentado um exemplo numérico-prático, sobre o controle de vibração em uma placa de aço, em uma faixa de freqüência. A explicação da obtenção dos parâmetros modais via identificação de parâmetros, através de curvas de resposta em freqüência (FRF), medidas experimentalmente, será feita. Serão mostrados os passos nos cálculos dos parâmetros ótimos dos neutralizadores e sua construção prática. Montado o sistema composto com neutralizadores ótimos, procede-se à medição de algumas de suas respostas em freqüência. Uma comparação entre a simulação numérica e os testes práticos mostrará o grau de confiança da metodologia utilizada neste trabalho.

No capítulo VII, um estudo sobre a influência da temperatura sobre o comportamento dos neutralizadores viscoelásticos será apresentado. Medições experimentais serão comparadas com um modelo de elementos finitos para prever a temperatura final do elastômero, provocado pela geração de calor deste em funcionamento (regime permanente).

No capítulo VIII, apresentam-se os comentários finais, conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO II**

### **MODELO VISCOELÁSTICO PARA NEUTRALIZADORES DINÂMICOS – REVISÃO**

## CAPÍTULO II: MODELO VISCOELÁSTICO PARA NEUTRALIZADORES DINÂMICOS - REVISÃO

Neste capítulo revisa-se um modelo matemático para materiais viscoelásticos, aplicados a sistemas dinâmicos.

Sistemas de um e dois graus de liberdade são apresentados em forma geral mostrando seus comportamentos dinâmicos para diferentes casos de materiais resilientes.

Conceito básico de neutralizador dinâmico é introduzido, quando modelado com material viscoelástico. A importância deste modelo reside na facilidade de construção prática.

Duas técnicas são apresentadas para a obtenção dos parâmetros ótimos dos neutralizadores: uma, amplamente conhecida como a técnica dos pontos fixos, e, a outra, proposta neste trabalho para comparação e como alternativa para neutralizar sistemas altamente amortecidos. Esta última usa conceitos de programação não linear para definir os parâmetros ótimos do neutralizador e será amplamente discutida nos capítulos posteriores, em que uma generalização ao estudo de neutralizadores dinâmicos será apresentada.

### 2.1 - Propriedades Dinâmicas dos Materiais Viscoelásticos

A deformação induzida em um material linear puramente elástico é proporcional à tensão que produz esta deformação. Existem dois tipos fundamentais de deformações que um material pode sofrer: cisalhamento, em que há variação de forma mas não de volume, e compressão, em que o material sofre variação de volume mas não de forma.

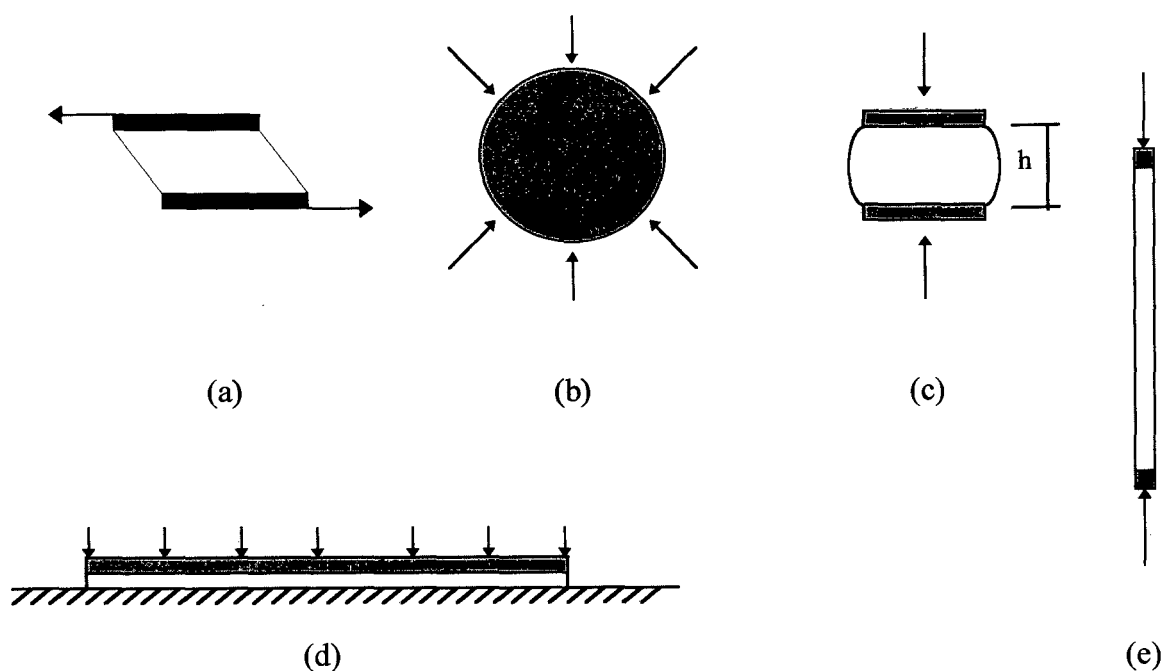


FIGURA 2.1 - Deformações dos materiais elásticos.

O primeiro tipo de deformação (figura 2.1a) é descrito pelo módulo de cisalhamento  $G$  e o segundo (figura 2.1b) pelo módulo volumétrico  $B$  (Snowdon, 1968). Na maioria dos casos o

$G$

estado de deformação do material é um misto entre cisalhamento e compressão, podendo predominar uma ou outra forma.

No caso de uma placa em que as dimensões laterais são grandes quando comparadas com a espessura (figura 2.1d), pode-se demonstrar que a relação entre tensão e deformação é dada pela relação:

$$M_b = B + \left(\frac{4G}{3}\right) \cong B, \quad (2.1.1)$$

uma vez que  $B \gg G$ . O módulo volumétrico  $B$  é numericamente muito maior que o módulo de cisalhamento  $G$ , assim, uma placa de borracha, por exemplo, é muito rígida à compressão.

No caso oposto (figura 2.1e), em que as dimensões laterais são pequenas em comparação com a espessura, a relação entre tensão e deformação é dada, aproximadamente, pelo módulo de Young  $E$ , que tem a seguinte relação com  $B$  e  $G$

$$E = \frac{9BG}{3B + G}, \quad (2.1.2)$$

sendo a relação de Poisson:

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1. \quad (2.1.3)$$

Aqui, também, como  $B \gg G$ , as equações (2.1.2) e (2.1.3) podem ser aproximadas pelas seguintes expressões:

$$E = 3G \quad (2.1.4)$$

e

$$\nu = 0.5. \quad (2.1.5)$$

Um elemento de borracha submetido à compressão (figura 2.1c) é um caso intermediário entre os casos da figura 2.1a e 2.1b. Evidentemente não se tem compressão pura, mas um estado complexo de deformações, envolvendo variação de forma e de volume. A relação tensão - deformação é descrita pelo módulo intermediário entre  $M$  e  $E$ , chamado módulo aparente de elasticidade, segundo Snowdon (1968), dado por:

$$E_a = (1 + \lambda S^2)E = 3(1 + \lambda S^2)G, \quad (2.1.6)$$

sendo que  $S$ , denominado fator de forma, é definido como a razão entre uma das áreas carregadas e toda a área livre. O fator  $\lambda$  é uma constante numérica que pode ser predita analiticamente ou medida de forma experimental.

Para amostras de borracha de seção reta circular, quadrada ou moderadamente retangular, pode-se tomar  $\lambda = 2$ . Se a borracha for endurecida por negro de fumo,  $\lambda$  pode ser um pouco menor (Espíndola, 1987). Para esta configuração a rigidez pode ser expressa como:

$$K = \frac{E_a A}{h} \quad (2.1.7)$$

onde

$$E_a = 3(1 + \lambda S^2)G, \quad (2.1.8)$$

$A$  = seção transversal,  
 $h$  = altura.

Uma amostra de borracha trabalhando em cisalhamento puro (figura 2.1a) terá como rigidez dinâmica a expressão

$$K = \frac{G A}{h}, \quad (2.1.9)$$

onde  $A$  é a área cisalhada e  $h$  é a altura entre as áreas carregadas.

Pode-se expressar, em forma geral que: quando um material viscoelástico linear submetido a tensões e deformações variantes no tempo, as deformações fundamentais de cisalhamento ou volumétricas não podem ser relacionadas com a tensão através de uma simples constante de proporcionalidade ( $G$  ou  $B$ ). Esta relação é geralmente representada pela seguinte equação diferencial parcial de ordem arbitrária (Snowdon, 1968):

$$\left( a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + a_{n1} \frac{\partial^{n1}}{\partial t^{n1}} \dots \right) \sigma = \left( b_0 + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots + b_{n1} \frac{\partial^{n1}}{\partial t^{n1}} \dots \right) \varepsilon,$$

onde  $\sigma$  e  $\varepsilon$  são a tensão e a deformação, respectivamente.

Quando a tensão e a deformação variam senoidalmente no tempo, esta equação diferencial pode ser substituída por uma equação algébrica da forma:

$$\left[ a_0 + (i\Omega) a_1 + (i\Omega)^2 a_2 + \dots + (i\Omega)^{n1} a_{n1} \dots \right] \tilde{\sigma} = \left[ b_0 + (i\Omega) b_1 + (i\Omega)^2 b_2 + \dots + (i\Omega)^{n1} b_{n1} \dots \right] \tilde{\varepsilon} \quad (2.1.10)$$

sendo

$\tilde{\sigma}$  = tensões variáveis no tempo,

$\tilde{\varepsilon}$  = deformações variáveis no tempo,

$\Omega$  = frequência em  $[seg^{-1}]$ ,

$i = \sqrt{-1}$ ,

$a_i$  e  $b_i$  coeficientes a determinar.

Uma forma simples de escrever (2.1.10) é

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\varepsilon}} \equiv \frac{[b(\Omega) + ib_1(\Omega)]}{[a(\Omega) + ia_1(\Omega)]}$$

onde:

$a, a_1, b$  e  $b_1$  são coeficientes a determinar experimentalmente e

$$i = \sqrt{-1}.$$

Importante notar que estas equações são válidas apenas na região linear de tensão - deformação.

Como a relação entre números complexos é um outro número complexo, a relação entre tensão e deformação também será. Assim, considerando cisalhamento puro, o módulo pode ser expresso como:

$$\bar{G}(\Omega) = G_r(\Omega) + i G_i(\Omega),$$

onde

$G_r(\Omega)$  é a parte real do módulo de cisalhamento (energia armazenada no material viscoelástico) e  $G_i(\Omega)$  é a parte imaginária, associada com a energia dissipada.

Uma outra forma de expressar o módulo de cisalhamento é:

$$\bar{G}(\Omega) = G_r(\Omega)(1 + i \eta_G(\Omega))$$

ou simplesmente

$$\bar{G}(\Omega) = G(\Omega)(1 + i \eta_G(\Omega))$$

onde  $\eta_G(\Omega) = \frac{G_i(\Omega)}{G_r(\Omega)}$ , denominado fator de perda.

Em geral esses materiais também variam com a temperatura  $\theta$  e, desta forma, os módulos de cisalhamento, volumétrico e de Young tomam a forma

$$\begin{aligned} \bar{G}(\Omega, \theta) &= G(\Omega, \theta)(1 + i \eta_G(\Omega, \theta)), \\ \bar{B}(\Omega, \theta) &= B(\Omega, \theta)(1 + i \eta_B(\Omega, \theta)), \\ \bar{E}(\Omega, \theta) &= E(\Omega, \theta)(1 + i \eta_E(\Omega, \theta)), \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

respectivamente. Geralmente o símbolo que representa a temperatura será omitido por simplicidade de notação. Segundo Snowdon (1968), para borrachas em geral

$$\eta_E(\Omega) = \eta_G(\Omega), \quad (2.1.12)$$

também válida para alguns materiais metálicos.

É conveniente representar a rigidez de um elemento de material elastomérico, em forma geral, como

$$\bar{K}(\Omega) = L \bar{G}(\Omega) \quad (2.1.13)$$

onde  $L$  tem dimensão de comprimento. No caso da figura 2.1a,  $L = A/h$  e figura 2.1c,  $L = 3A(1 + \lambda S^2)/h$ . Em peças de formas irregulares, onde este tipo de material é usado,  $L$  pode



ser determinado experimentalmente. Esta forma de representar a rigidez de uma material viscoelástico (equação 2.1.13) é muito usada em controle e isolamento de vibração e ruído, pela sua simplicidade.

Pode-se observar, do exposto até aqui que o conhecimento preciso das características do material viscoelástico,  $G(\Omega)$  e  $\eta(\Omega)$ , é fundamental.

## 2.2 - Variação das Características dos Materiais Viscoelásticos em Função da Frequência e da Temperatura

### 2.2.1 - Temperatura e Frequência de Transição

O módulo dinâmico de cisalhamento dos materiais viscoelásticos, em geral, aumenta com a frequência e diminui com o aumento da temperatura. Uma notação complexa do módulo de cisalhamento seria  $\bar{G}(\Omega, \theta)$ , onde  $\theta$  é a temperatura.

O fator de perda dos materiais viscoelásticos aumenta com a frequência até um máximo, quando então, começa a diminuir. Este ponto de máximo corresponde aproximadamente à maior inclinação (derivada) na curva de  $G(\Omega)$ , figura 2.2.

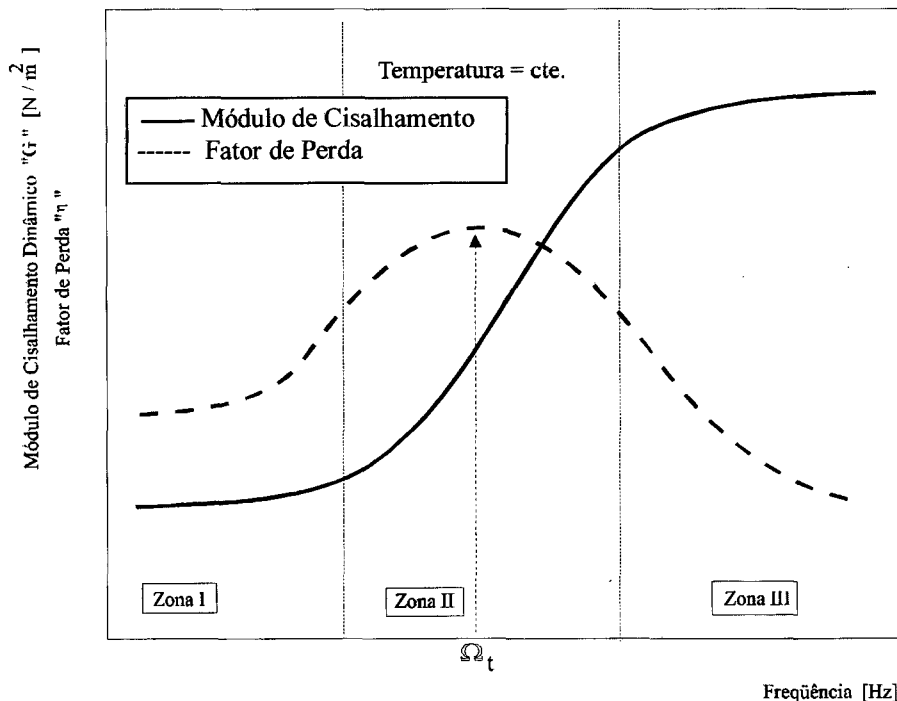


FIGURA 2.2 - Variação das características de um material viscoelástico com a frequência a temperatura constante.

A frequência  $\Omega t$  é conhecida como frequência de transição já que, a partir desse ponto, a borracha perde sua resiliência assumindo um comportamento vítreo (módulo de cisalhamento aumentando progressivamente).

A figura 2.3 mostra o comportamento de uma borracha com variação de temperatura a frequência constante. Aqui o fator de perda aumenta com a temperatura até um certo valor máximo relativo, chamada temperatura de transição, quando começa a diminuir. O módulo dinâmico diminui em forma constante.

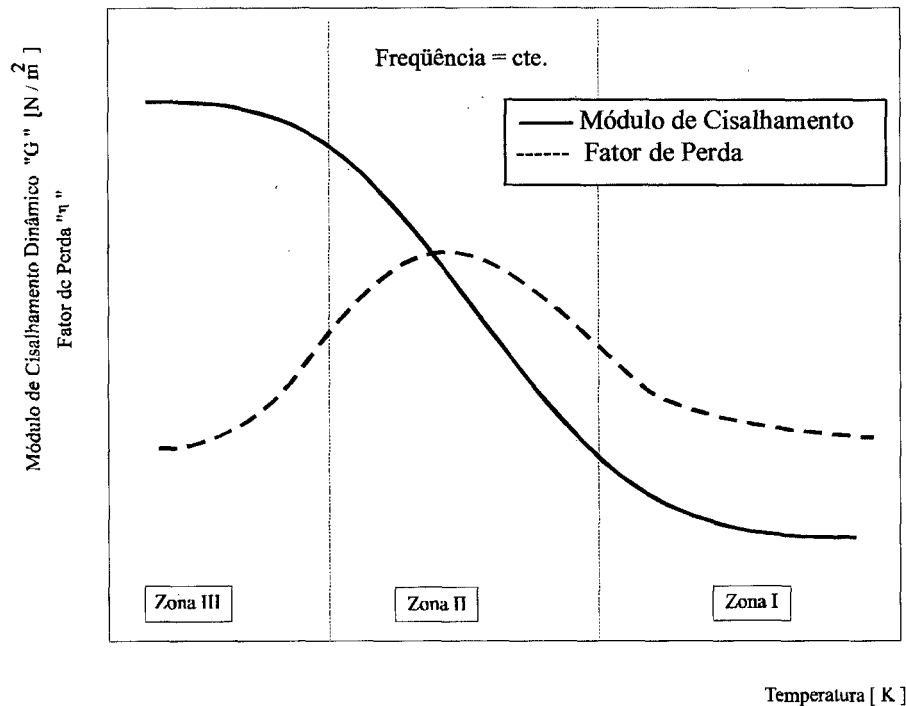


FIGURA 2.3 - Variação das características com a temperatura a frequência constante.

Existem três zonas bem definidas: uma onde a temperatura de transição se encontra bem abaixo da temperatura ambiente ou a frequência de transição é relativamente elevada, zona 1 na figura 2.2. Materiais nestas zonas são chamados de baixo amortecimento. A segunda, cuja temperatura e frequência de transição acham-se dentro ou perto da faixa usual de trabalho (zona 2) chamada de região de transição e uma terceira, chamada região vítrea (zona 3), contendo um elevado valor no módulo de cisalhamento.

Segundo Espíndola (1990), algumas observações em relação a materiais viscoelásticos que se correspondem com a Zona I e II são:

- a - quanto aos primeiros, denominados Tipo I
  - possuem elevada resiliência,
  - grande estabilidade estrutural,
  - baixo ou médio amortecimento.

Dentro desta categoria pode-se achar a borracha natural, com e sem enchimento, neoprene e SBR. O fator de perda para essas borrachas varia de 0.01 a 0.1, aproximadamente. Tanto o fator de perda quanto o módulo de cisalhamento podem ser considerados constantes.

## b - Quanto ao Tipo II

- possuem grande rigidez (reduzida resiliência),
- precária estabilidade estrutural,
- elevado amortecimento.

Entende-se por precária estabilidade estrutural à elevada relaxação destes materiais quando submetidos a uma tensão constante. Podem-se citar, dentro desta categoria, a resina de polivinila butiral plastificada, “thiokol” RD, acetato de polivinila plastificado, borracha butílica com enchimento de negro de fumo e outros. Em geral o fator de perda é menos sensível às variações de frequência do que o módulo dinâmico de elasticidade.

## 2.3 - Sistemas de um Grau de Liberdade

Um sistema é dito de um grau de liberdade se somente uma coordenada física for necessária para determinar sua dinâmica.

Um sistema com um grau de liberdade possui uma só frequência natural ou de ressonância (frequência na qual o sistema responde com grandes amplitudes quando excitado). A figura 2.4 apresenta um sistema simples, de um grau de liberdade, composto de uma massa e um material viscoelástico ligado à terra.

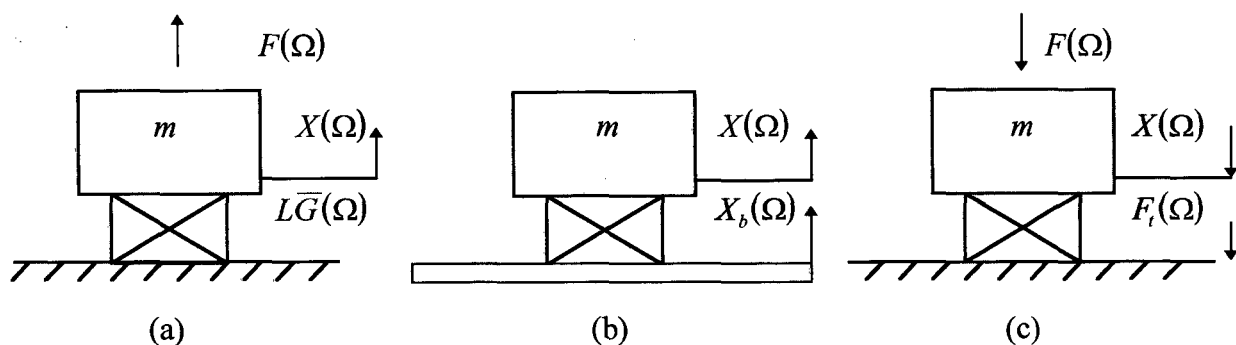


FIGURA 2.4 - Sistema simples

### 2.3.1 - Função Resposta em Frequência

A função resposta em frequência, como será mostrada neste item, é uma característica do sistema, uma vez que depende apenas dos parâmetros do mesmo. No controle de vibrações e isolamento, o conhecimento desta função é importante, não só na parte do projeto em si, mas também, na qualificação do mesmo. Neste item o desenvolvimento matemático de tal função, para sistemas de um grau de liberdade, será abordado com detalhes.

Com ajuda da figura 2.5 (diagrama de corpo livre) pode-se determinar a resposta do sistema mostrado na figura 2.4a, quando excitado por uma força  $F(\Omega)$ . A formulação matemática é realizada no domínio da frequência, já que as características dos materiais viscoelásticos são obtidos neste domínio através de ensaios experimentais.

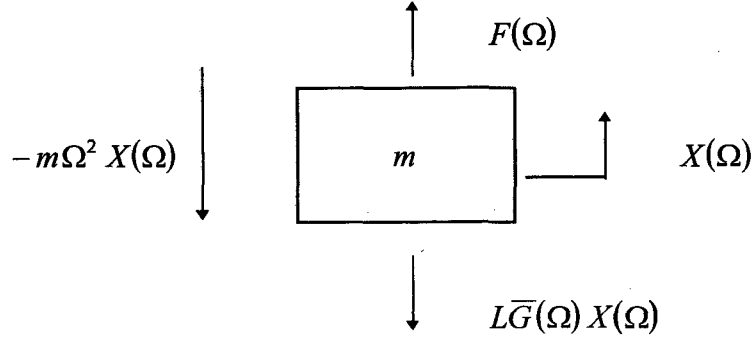


FIGURA 2.5 - Diagrama de corpo livre

Utilizando a segunda lei de Newton têm-se:

$$-m\Omega^2 X(\Omega) = F(\Omega) - L\bar{G}(\Omega) X(\Omega) \quad (2.3.1.1)$$

sendo que  $\bar{K}(\Omega) = L\bar{G}(\Omega)$ .

A resposta do sistemas da figura 2.4a é dada por:

$$X(\Omega) = \frac{1}{[-m\Omega^2 + L\bar{G}(\Omega)]} F(\Omega).$$

Pode-se definir a função resposta em frequência como

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{[-m\Omega^2 + L\bar{G}(\Omega)]} \quad (2.3.1.2)$$

Observe-se que (2.3.1.2) depende apenas dos parâmetros do sistema e não da excitação que está sendo aplicada.

Substituindo a expressão (2.1.11) em (2.3.1.2) têm-se:

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{[-m\Omega^2 + LG(1 + i\eta(\Omega))]} \quad (2.3.1.3)$$

Existem casos em que é conveniente trabalhar com a função  $H(\Omega)$  em forma adimensional. Para realizar isto, definem-se as seguintes relações:

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{LG(\Omega_n)}{m}} \quad \beta = \frac{\Omega}{\Omega_n} \quad r(\Omega) = \frac{K(\Omega)}{K(\Omega_n)} = \frac{LG(\Omega)}{LG(\Omega_n)} = \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_n)} \quad (2.3.1.4)$$

e multiplica-se o primeiro membro da equação (2.3.1.3) por  $\bar{K}(\Omega) = L\bar{G}(\Omega)$ . O resultado destes passos é:

$$H_{ad}(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{\frac{F(\Omega)}{K(\Omega)}} = \frac{r(\Omega)}{[-\beta^2 + r(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))]} \quad (2.3.1.5)$$

Em geral, utiliza-se neste trabalho o símbolo  $H(\Omega)$  tanto para resposta em frequência dimensional quanto adimensional. A expressão (2.3.1.5) pode ser especializada para diferentes casos, como será mostrado a continuação.

**Mola em Paralelo com Amortecedor Viscoso:** (ver anexo 2)

$$\begin{aligned} r(\Omega) &= 1 \\ \eta(\Omega) &= 2\xi \frac{\Omega}{\Omega_n} \end{aligned} \quad (2.3.1.6)$$

onde

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\Omega_n},$$

$c$  a constante de amortecimento viscoso e  $c_c$  é denominado amortecimento crítico.

**Material Viscoelástico Tipo I:** uma visualização simples na figura 2.2 mostra que estes parâmetros podem ser considerados como

$$\begin{aligned} r(\Omega) &= 1 \\ \eta(\Omega) &= \eta = cte. \end{aligned} \quad (2.3.1.7)$$

**Material Viscoelástico Tipo II:** nesta região, o módulo de cisalhamento é proporcional à frequência e o fator de perda pode ser considerado constante.

$$\begin{aligned} r(\Omega) &= \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_n)} = \frac{\Omega}{\Omega_n} \\ \eta(\Omega) &= \eta = cte. \end{aligned} \quad (2.3.1.8)$$

Na figura 2.6 pode-se observar a resposta de um sistema de um grau de liberdade (equação 2.3.1.5) para os distintos modelos ((2.3.1.6), (2.3.1.7) e (2.3.1.8)). A frequência natural é a mesma em todos os casos e igual a  $141.42 \text{ [seg}^{-1}\text{]}$ , o fator de perda  $\eta = 0.1$  e  $\xi = 0.05$ .

Uma frequência levemente diferente foi adotada para o modelo viscoso uma vez que as curvas deste com o modelo viscoelástico Tipo II ficavam sobrepostas.

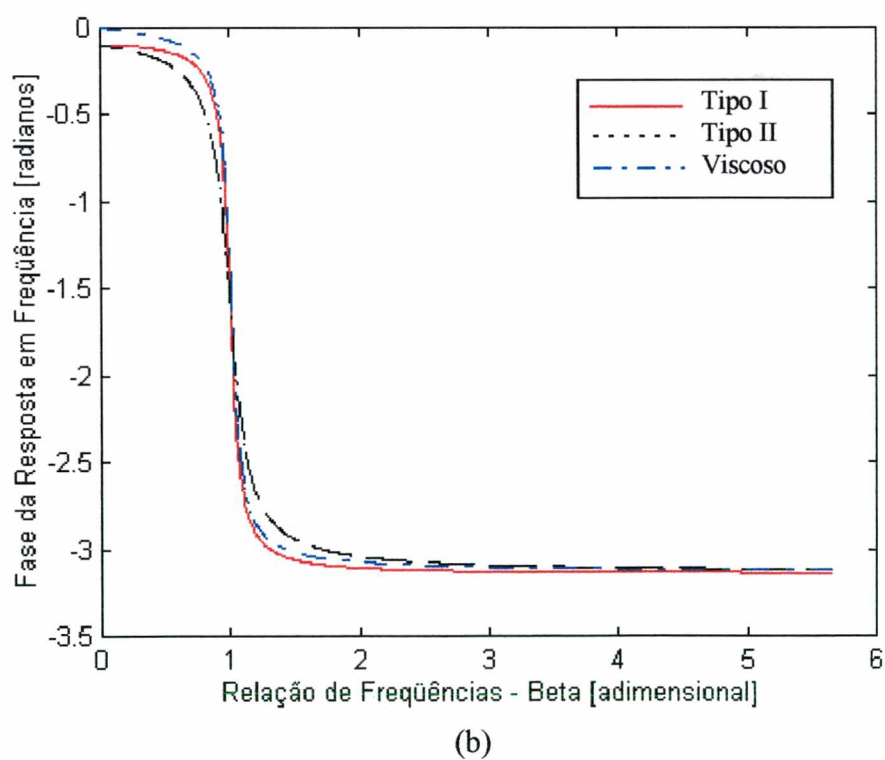
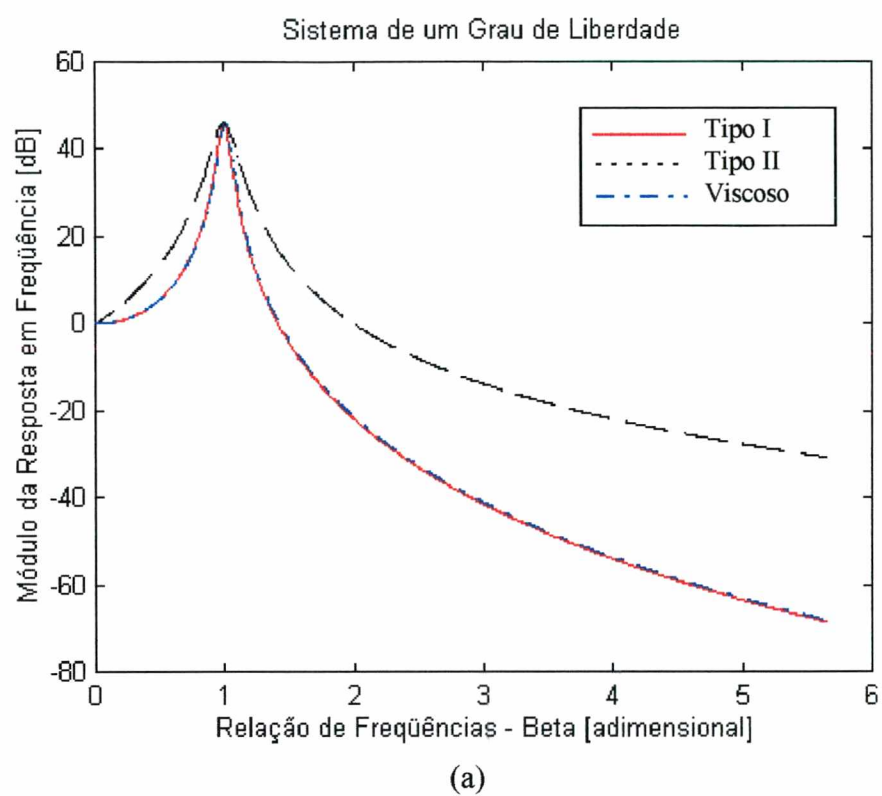


FIGURA 2.6 - Função resposta em frequência (FRF) para um sistema simples: a) módulo, b) fase. O fator de perda  $\eta = 0.1$  e o coeficiente de amortecimento viscoso  $\xi = 0.05$ .

### 2.3.2 - Transmissibilidade

Outra função, característica do sistema, é a transmissibilidade. Esta função é muito utilizada por vários autores (Snowdon, 1966, Espíndola, 1987, Kitis, 1983, entre outros), tanto em isolamento como em controle de vibrações, aqui apresentada para definir algumas características em relação aos materiais viscoelásticos.

A transmissibilidade é definida como o valor absoluto da relação entre os deslocamentos  $X$  e  $X_b$  da figura 2.4b, assim:

$$T = \left| \frac{X}{X_b} \right|. \quad (2.3.2.1)$$

Um problema equivalente considera a transmissibilidade como a relação entre a força transmitida à fundação e a força aplicada ao sistema (ver figura 2.4c). Esta definição pode ser equacionada como

$$T = \left| \frac{F_t}{F} \right|. \quad (2.3.2.2)$$

É fácil demonstrar que ambas relações (2.3.2.1) e (2.3.2.2) resultam na mesma expressão (2.3.2.3) abaixo. Tomando a expressão (2.3.2.1) e (2.3.1.1) prova-se que a transmissibilidade é dada por:

$$T(\Omega) = \left| \frac{r(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))}{[-\beta^2 + r(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))]} \right|. \quad (2.3.2.3)$$

Na figura 2.7 mostra-se o gráfico que representa a equação (2.3.2.3) para cada modelo matemático dado pelas equações (2.3.1.6), (2.3.1.7) e (2.3.1.8). Os parâmetros utilizados foram os mesmos quando calculada a resposta em frequência. Observa-se nesta figura que para material viscoelástico Tipo I, a transmissibilidade tem variação inversamente proporcional à frequência ao quadrado. Nas altas frequências, significa um decaimento de 12 dB/oitava. Já para material viscoelástico Tipo II e mola - amortecedor viscoso, o decaimento é de 6 dB/oitava.

Explica-se desta forma a utilização de materiais Tipo I em isolamento de vibrações já que, além do alto decaimento nas altas frequências, possuem uma elevada estabilidade estrutural.

Os materiais viscoelásticos Tipo II (zona de transição da figura 2.2), devido ao alto amortecimento são mais utilizados para controle de vibrações, objeto de estudo que será desenvolvido neste trabalho.

## 2.4 - Sistema Composto

Sistema composto é definido como a junção dos sistemas primário (principal) e secundário. Sistema primário aqui é o sistema ao qual pretende-se controlar/reduzir as vibrações e o secundário, aquele utilizado para este objetivo.

O sistema secundário, ao ser fixado em um sistema primário, cria um novo sistema (composto), cujos graus de liberdade estão relacionados com os graus de liberdade de ambos sistemas.

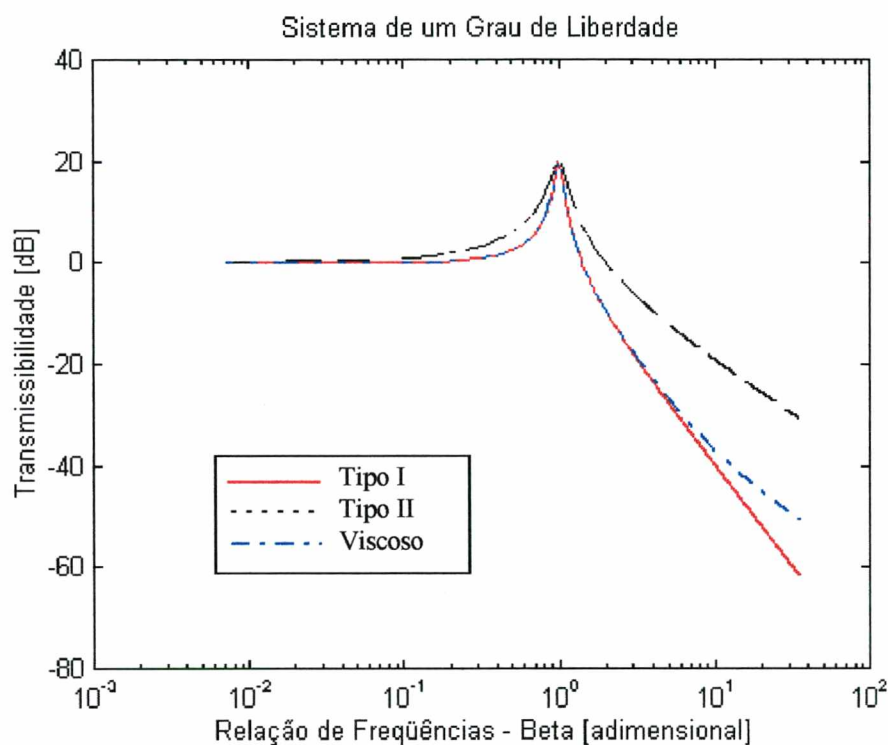


FIGURA 2.7 - Transmissibilidade. Fator de perda  $\eta = 0.1$ , coeficiente de amortecimento  $\xi = 0.05$

No caso de sistema primário simples (um grau de liberdade) e sistema auxiliar também simples, o sistema composto terá dois graus de liberdade como mostrado na figura 2.8a. O estudo destes sistemas fornecem as idéias básicas sobre neutralizadores dinâmicos simples fixados em sistemas de um grau de liberdade. Estes dispositivos serão mostrados no item 2.5 chamando-os, indistintamente, neutralizador dinâmico ou sistema secundário.

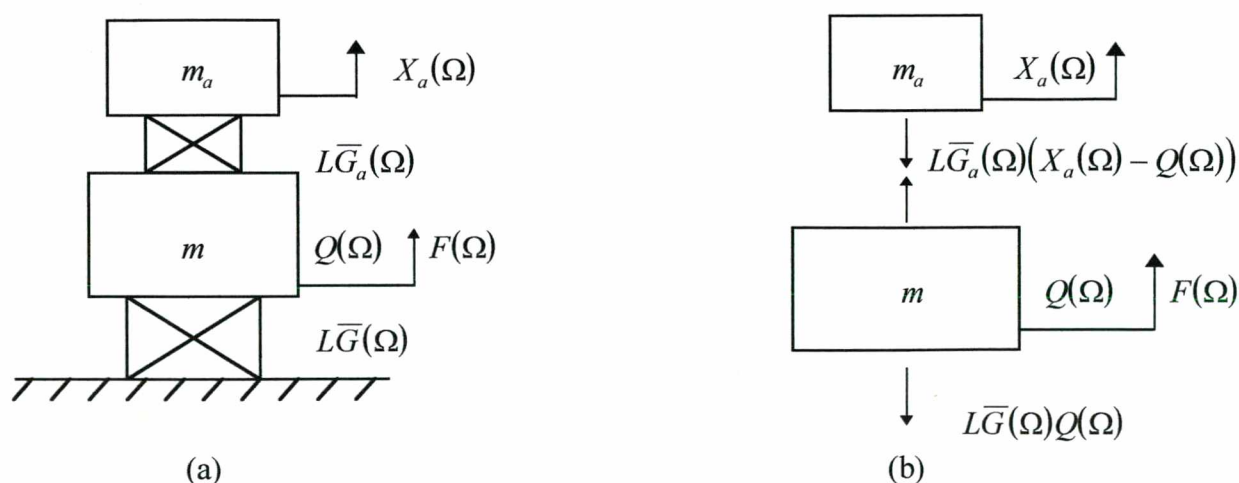


FIGURA 2.8 - Sistema composto: a) esquema básico, b) diagrama de corpo livre



Uma análise dinâmica considerando o caso geral, em que os materiais fixados entre as massas de ambos subsistemas (primário e secundário) são viscoelásticos será realizada.

Considera-se grau de liberdade somente na direção vertical.

Utilizando novamente diagrama de corpo livre (figura 2.8b), aplicando a segunda lei de Newton e trabalhando no domínio da frequência, por conveniência, acha-se o seguinte sistema de equações:

$$F(\Omega) - L\bar{G}(\Omega)Q(\Omega) + L\bar{G}_a(\Omega)[X_a(\Omega) - Q(\Omega)] = -\Omega^2 m Q(\Omega) \quad (2.4.1)$$

$$-L\bar{G}_a(\Omega)[X_a(\Omega) - Q(\Omega)] = -\Omega^2 m_a X_a(\Omega). \quad (2.4.2)$$

Da equação (2.4.2) pode-se escrever o deslocamento do sistema secundário em função do deslocamento do sistema primário e, substituindo este na equação (2.4.1), obtém-se  $Q(\Omega)$ :

$$Q(\Omega) = \frac{L\bar{G}_a(\Omega) - \Omega^2 m_a}{\left[(-\Omega^2 m + L\bar{G}(\Omega))(L\bar{G}_a(\Omega) - \Omega^2 m_a) - L\bar{G}_a(\Omega)m_a\Omega^2\right]} F(\Omega), \quad (2.4.3)$$

onde

$$\bar{G}(\Omega) = G(\Omega)(1 + i\eta(\Omega)),$$

$$\bar{G}_a(\Omega) = G_a(\Omega)(1 + i\eta_a(\Omega)) \text{ e } L \text{ é um fator que depende da forma do material viscoelástico.}$$

Novamente, a relação  $\frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)}$  é uma característica do sistema e será chamada função resposta em frequência ou receptância,  $H(\Omega)$ . Importante notar que esta função não é única no caso de sistemas que possuem dois graus de liberdade.  $H(\Omega)$  é uma das componentes de uma matriz de função resposta em frequência, sendo corretamente definida como a resposta no sistema primário quando excitado nele próprio. Restando ainda calcular, para caracterizar de forma completa o sistema, a resposta do sistema primário quando excitado no secundário e a resposta do sistema secundário quando excitado também no sistema secundário, uma vez que a matriz é simétrica para este tipo de problemas. Como o interesse neste item é apresentar a resposta do sistema primário apenas para seu posterior controle, as demais respostas em frequência serão omitidas.

Uma forma alternativa para escrever a resposta em frequência é adimensional, da mesma maneira como feito para sistemas de um grau de liberdade:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Omega_a}{\Omega_n} & \varepsilon &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\Omega}{\Omega_a} \\ \beta &= \frac{\Omega}{\Omega_n} & \mu &= \frac{m_a}{m} \\ r(\Omega) &= \frac{K(\Omega)}{K(\Omega_n)} = \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_n)} & r_a(\Omega) &= \frac{K_a(\Omega)}{K_a(\Omega_a)} = \frac{G_a(\Omega)}{G_a(\Omega_a)} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$$H(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{\frac{F(\Omega)}{K(\Omega)}} = \frac{\alpha^2(1+i\eta_a(\Omega)) - \frac{\beta^2}{r_a(\Omega)}}{\left[ \left( -\frac{\beta^2}{r(\Omega)} + (1+i\eta(\Omega)) \right) \left( (1+i\eta_a(\Omega))\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r_a(\Omega)} \right) - (1+i\eta_a(\Omega))\mu\alpha^2\frac{\beta^2}{r(\Omega)} \right]} \quad (2.4.5)$$

sendo  $\Omega_n$  a frequência natural do sistema primário.

Geralmente o material viscoelástico, fixado entre a massa do sistema primário e a fundação, é considerado Tipo I ou mola-amortecedor viscoso.

Desta forma o coeficiente  $r(\Omega) = 1$  e a equação (2.4.5) fica:

$$H(\Omega) = \frac{\alpha^2(1+i\eta_a(\Omega)) - \frac{\beta^2}{r_a(\Omega)}}{\left[ \left( -\beta^2 + (1+i\eta(\Omega)) \right) \left( (1+i\eta_a(\Omega))\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r_a(\Omega)} \right) - (1+i\eta_a(\Omega))\mu\alpha^2\beta^2 \right]} \quad (2.4.6)$$

ou

$$H(\Omega) = \frac{r_a(\Omega)\alpha^2(1+i\eta_a(\Omega)) - \beta^2}{\left[ \left( -\beta^2 + (1+i\eta(\Omega)) \right) \left( (1+i\eta_a(\Omega))r_a(\Omega)\alpha^2 - \beta^2 \right) - (1+i\eta_a(\Omega))r_a(\Omega)\mu\alpha^2\beta^2 \right]} \quad (2.4.7)$$

Pode-se escrever a equação (2.4.7) separando, tanto no numerador quanto no denominador, a parte real e imaginária da seguinte forma:

$$H(\Omega) = \frac{R_N + iI_N}{R_D + iI_D}$$

onde

$$\begin{aligned} R_N &= r_a(\Omega)\alpha^2 - \beta^2 \\ I_N &= r_a(\Omega)\alpha^2\eta_a(\Omega) \\ R_D &= (1-\beta^2)(r_a(\Omega)\alpha^2 - \beta^2) - r_a(\Omega)\alpha^2\beta^2\mu - r_a(\Omega)\alpha^2\eta(\Omega)\eta_a(\Omega) \\ I_D &= (1-\beta^2)(r_a(\Omega)\alpha^2\eta_a(\Omega)) - r_a(\Omega)\alpha^2\beta^2\mu\eta_a(\Omega) + (r_a(\Omega)\alpha^2 - \beta^2)\eta(\Omega) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

sendo o módulo e o argumento

$$\begin{aligned} |H(\Omega)| &= \sqrt{\frac{R_N^2 + I_N^2}{R_D^2 + I_D^2}} \\ \vartheta &= \tan^{-1} \left( \frac{R_D I_N - R_N I_D}{R_N R_D + I_N I_D} \right), \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

respectivamente.

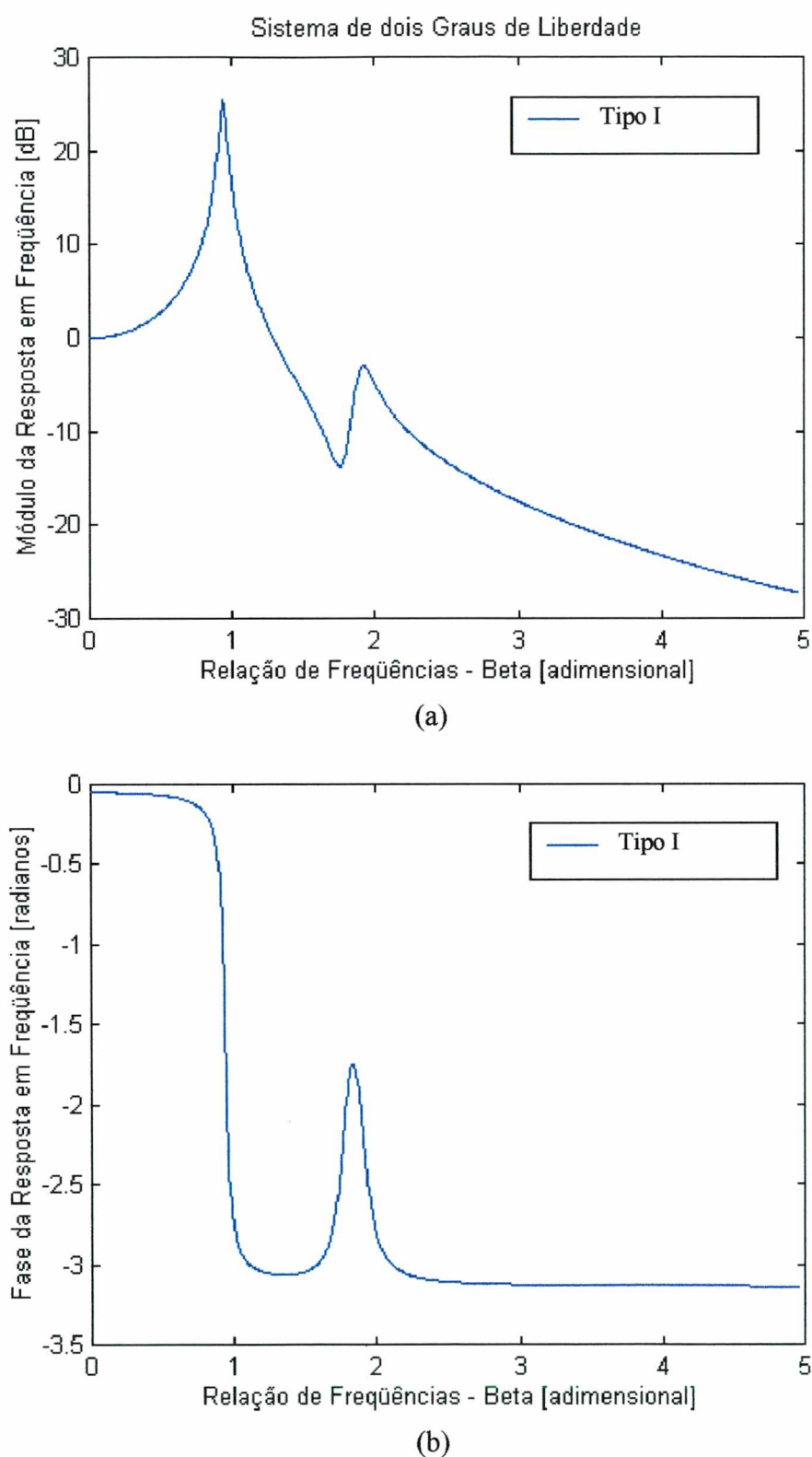


FIGURA 2.9 - Resposta do sistema composto tomada na massa do sistema primário: a) módulo, b) fase.

Lembrando que esta equação é geral, mostra-se na figura 2.9, o gráfico para o caso particular onde o material viscoelástico é do Tipo I. Os dados são:

$$\Omega_n = 141 [\text{rad} / \text{seg}]$$

$$\Omega_a = 250 [\text{rad} / \text{seg}]$$

$$\mu = 0.1$$

$$\eta = 0.05$$

$$\eta_a = 0.08$$

## 2.5 - Neutralizador Dinâmico

Uma aplicação muito utilizada em controle de vibrações e ruído é escolher as características do sistema secundário de forma tal que o nível de vibração do sistema primário seja reduzido a valores aceitáveis (Espíndola, 1987) ou, a amplitude da sua resposta minimizada. Este sistema é conhecido como neutralizador dinâmico ou absorvedor dinâmico de vibrações. O primeiro em estudar neutralizadores dinâmicos de um grau de liberdade, aplicados a sistemas também de um grau de liberdade foi Den Hartog (1956). Utilizou para isto, um modelo viscoso (mola em paralelo com amortecedor viscoso). Snowdon (1968) realiza o mesmo estudo para modelos viscoelásticos, uma vez que estes, são na prática, fáceis de reproduzir. Aqui, faz-se uma revisão ao estudo realizado pelos autores, antes mencionados, de uma forma geral, trabalhando com modelo viscoelástico tanto para o sistema primário quanto para o neutralizador. Apresenta-se também, uma nova forma para a escolha dos parâmetros ótimos dos neutralizadores, através da utilização de técnicas de otimização não linear e comparando-a com a técnica dos pontos fixos proposta por Den Hartog (1956) e Snowdon (1968).

Um neutralizador dinâmico simples consiste de uma massa  $m_a$  na qual é fixado um material resiliente (material viscoelástico ou mola - amortecedor viscoso) e este fixado no sistema primário (figura 2.10). Por outro lado o sistema primário, de massa  $m$ , contém um outro elemento resiliente ligando-o à base rígida.

A resposta do sistema composto para uma excitação senoidal  $F(\Omega)$  é dada pela equação (2.4.9), cujo gráfico foi mostrado na figura 2.9.

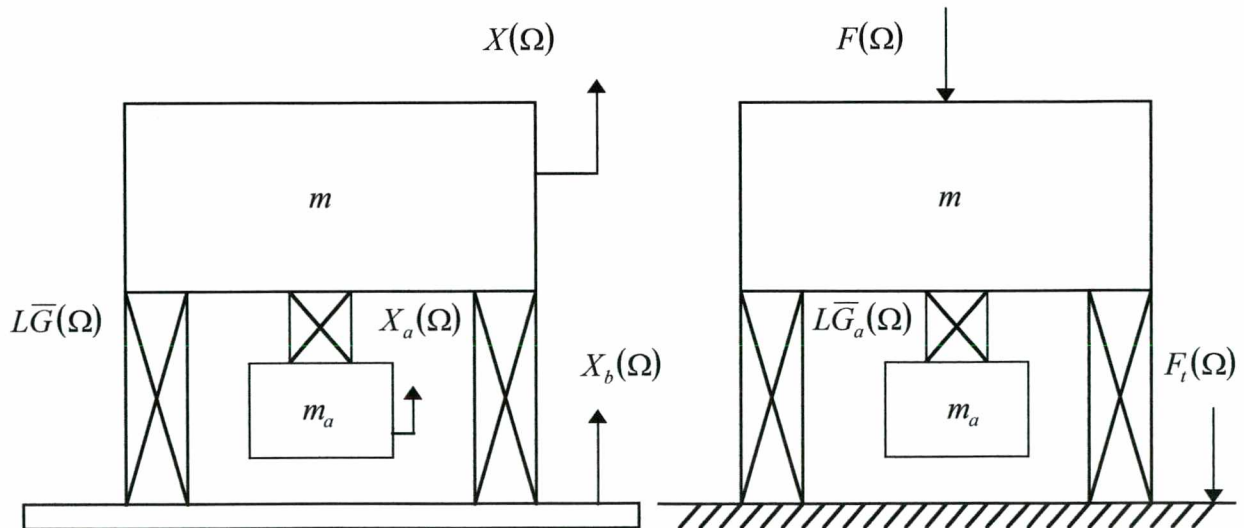


FIGURA 2.10 - Esquema de um sistema simples com neutralizador dinâmico simples.



A partir da equação (2.4.9), duas formas básicas para neutralizar a resposta do sistema primário são:

- utilizar a técnica dos pontos fixos,
- utilizar técnicas de otimização não linear.

### 2.5.1 - Técnica dos Pontos Fixos

Ao desprezar o fator de perda do sistema primário ( $\eta = 0$ ), a resposta do sistema composto (primário mais neutralizador) medida no sistema primário para diferentes valores de  $\eta_a$ , passarão sempre através de dois pontos bem definidos. Estes são conhecidos como pontos fixos. Na figura 2.11 mostra-se este fenômeno para os casos extremos  $\eta_a = 0$ ,  $\eta_a = \infty$  e para um material viscoelástico Tipo I. Mostra-se também, nesta figura, a resposta correspondente a um fator de perda genérico entre estes casos extremos ( $\eta_a = 0.1$ ).

As expressões correspondentes para estes casos particulares, partindo da equação (2.4.9), são, respectivamente:

$$|H_0(\Omega)|^2 = \frac{(r_a(\Omega)\alpha^2 - \beta^2)^2}{[(1 - \beta^2)(r_a(\Omega)\alpha^2 - \beta^2) - r_a(\Omega)\alpha^2\beta^2\mu]^2} \quad (2.5.1.1)$$

$$|H_\infty(\Omega)|^2 = \frac{1}{[1 - \beta^2(1 + \mu)]^2}.$$

A interseção das curvas na figura 2.11, representam os pontos fixos. As frequências correspondentes são denominadas  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$ , tomando-se por convenção  $\Omega_A < \Omega_B$ .

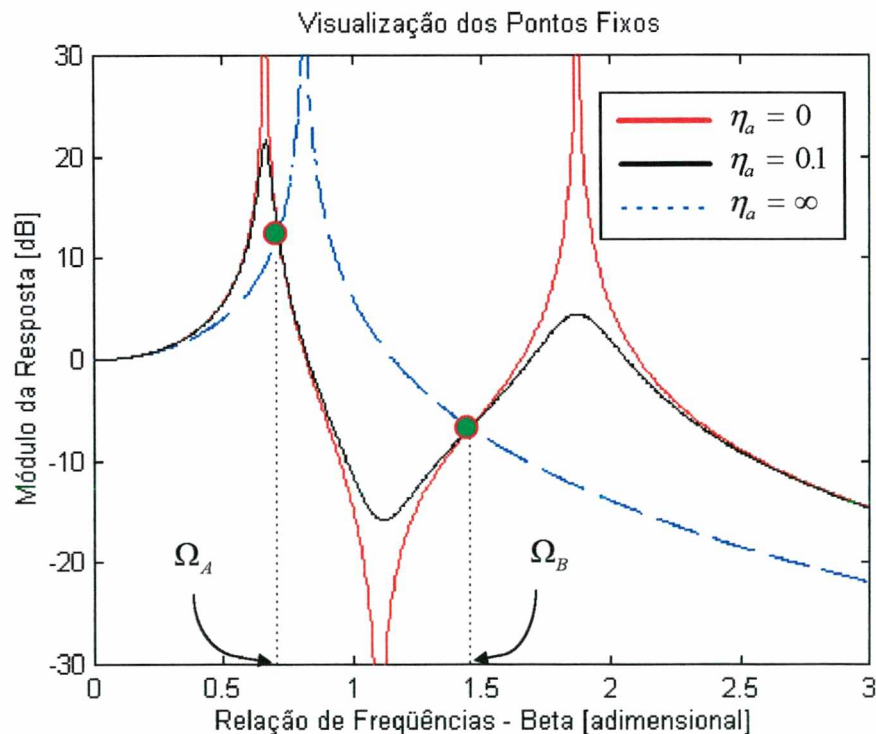


FIGURA 2.11 - Pontos fixos para sistemas de dois graus de liberdade:  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$

Demonstra-se (Den Hartog 1956, Snowdon 1968 e outros) que o valor mínimo do módulo da resposta, equação (2.4.7), é obtido quando os pontos fixos encontram-se na mesma altura e os picos da resposta passam o mais perto possível destes.

Para localizar estes pontos, parte-se da equação (2.4.9) e procura-se uma relação (função de  $\Omega$ ) de forma que o módulo da resposta ao quadrado seja independente do fator de perda  $\eta_a$ .

Assim:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{A + B \eta_a^2(\Omega)}{C + D \eta_a^2(\Omega)} = \frac{B[(A/B) + \eta_a^2(\Omega)]}{D[(C/D) + \eta_a^2(\Omega)]} \quad (2.5.1.2)$$

sendo estes parâmetros (ver (2.4.8) e (2.4.9)):

$$\begin{aligned} A &= R_N^2 \\ B &= (I_N / \eta_a(\Omega))^2 \\ C &= R_D^2 \\ D &= (I_D / \eta_a(\Omega))^2. \end{aligned}$$

É importante notar que, para garantir a existência dos pontos fixos, tomou-se, nas expressões acima,  $\eta(\Omega) = 0$ .

Para que a equação (2.5.1.2) seja independente de  $\eta_a$ , a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Desta relação surge o seguinte polinômio em  $\Omega$ :

$$(2 + \mu) \beta^4 - 2[1 + (1 + \mu) r_a(\Omega) \alpha^2] \beta^2 + 2 r_a(\Omega) \alpha^2 = 0. \quad (2.5.1.3)$$

A equação (2.5.1.3) é geral, isto é, válida para qualquer elemento resiliente do neutralizador já que o sistema primário foi escolhido para ser viscoelástico Tipo I ou mola - amortecedor viscoso. As raízes deste polinômio fornecerão as frequências  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$ .

### Casos Particulares de Modelos de Neutralizadores Dinâmicos

a) Se o neutralizador é composto por uma mola em paralelo com um amortecedor viscoso:

$$r_a(\Omega) = 1$$

$$\eta_a(\Omega) = 2 \xi_a \varepsilon = 2 \xi_a \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{onde } \xi_a = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2 m_a \Omega_a}$$

$$(2 + \mu) \beta^4 - 2[1 + (1 + \mu) \alpha^2] \beta^2 + 2 \alpha^2 = 0 \quad (2.5.1.4)$$

b) Se o neutralizador é composto por material viscoelástico Tipo I:

$$r_a(\Omega) = 1$$

$$\eta_a(\Omega) = \eta = cte$$

$$(2 + \mu)\beta^4 - 2[1 + (1 + \mu)\alpha^2]\beta^2 + 2\alpha^2 = 0. \quad (2.5.1.5)$$

c) Se o neutralizador é composto por material viscoelástico Tipo II:

$$r_a(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega_a} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\eta_a(\Omega) = \eta = cte$$

$$(2 + \mu)\beta^3 - 2(1 + \mu)\alpha\beta^2 - 2\beta - 2\alpha = 0. \quad (2.5.1.6)$$

### Sintonização Ótima:

Consiste em fazer com que os pontos fixos fiquem à mesma altura. Para isto, toma-se a equação (2.5.1.1) com  $\eta_a = \infty$ , por exemplo, e iguala-se seu valor para as diferentes frequências  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$ . Feito isto, uma relação entre  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$  é encontrada, sendo esta independente do amortecimento como mostra a equação (2.5.1.7).

$$\beta_A^2 + \beta_B^2 = \frac{2}{1 + \mu} \quad (2.5.1.7)$$

Esta, juntamente com (2.5.1.4), (2.5.1.5) e (2.5.1.6), permitem calcular as frequências que determinam os pontos fixos e a escolha do parâmetro  $\alpha_{ot}$  (relação ótima de frequências entre o neutralizador e o sistema primário) que provoca a mesma altura nos mesmos.

Para amortecimento viscoso e viscoelástico Tipo I:

$$\alpha_{ot} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (2.5.1.8)$$

$$\beta_{A,B}^2 = \frac{1}{(1 + \mu)} \left[ 1 \pm \left[ \frac{\mu}{2 + \mu} \right]^{1/2} \right] \quad (2.5.1.9)$$

$$H_{A,B}^2 = \frac{2 + \mu}{\mu}. \quad (2.5.1.10)$$

Para material viscoelástico Tipo II:

$$\alpha_{ot} = \frac{1}{1+\mu} \left[ \frac{2(2+\mu)}{(4+\mu)(1+\mu)} \right]^{1/2} \quad (2.5.1.11)$$

$$\beta^2_{A,B} = \phi \pm \psi \quad (2.5.1.12)$$

$$\phi = \left[ \frac{4+\mu}{2(1+\mu)(2+\mu)} \right]^{1/2} ; \quad \psi = \left[ \frac{\mu}{2(1+\mu)(2+\mu)} \right]^{1/2}$$

$$H^2_{A,B} = \frac{2+\mu}{[\mu(4+\mu)]^{1/2}} \cdot \quad (2.5.1.13)$$

### Amortecimento Ótimo

Amortecimento ótimo faz com que os picos da resposta, mostrada na figura 2.11, passem pelos pontos fixos. Uma forma é fazer a derivada da resposta, em  $\Omega_A$  e  $\Omega_B$  igual a zero e, assim, achar os amortecimentos para cada caso. Posteriormente toma-se uma média aritmética para definir um fator de perda único (Espíndola, 1987, Snowdon, 1968). Não serão mostrados aqui os passos necessários para a obtenção das equações para cada caso particular.

Amortecimento viscoso:

$$\xi_{a_{ot}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \cdot \quad (2.5.1.14)$$

Para sólido Tipo II:

$$\eta_{a_{ot}} = C_2 \delta_{2m} \quad (2.5.1.15)$$

$$C_2 = \left[ \frac{10.5 - \alpha^2_{ot} (1+\mu)}{10} \right]^{1/2} \left[ \frac{1 - \beta_A (1+\mu)^{1/2}}{\beta_B (1+\mu)^{1/2} - 1} \right]^{1/4}$$

$$\delta_{2m} = \frac{N}{2\sqrt{2}} \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{4+\mu}{2} \right) (1+\mu) \beta_A^2 \right]^{1/2} + \left[ 1 + \left( \frac{4+\mu}{2} \right) (1+\mu) \beta_B^2 \right]^{1/2} \right\}.$$

Para sólido Tipo I:

$$\eta_{a_{ot}} = C_1 \delta_{2m} \quad (2.5.1.16)$$



$$C_1 = \left[ \frac{10.5 - \alpha^2_{ot} (1 + \mu)}{10} \right] \left[ \frac{1 - \beta_A (1 + \mu)^{1/2}}{\beta_B (1 + \mu)^{1/2} - 1} \right]^{1/2}$$

$$\delta_{2m} = \left[ \frac{\mu(1 + \mu)}{8} \right]^{1/2} \left\{ \beta_A [2 + \beta_A^2 (1 + \mu)]^{1/2} + \beta_B [2 + \beta_B^2 (1 + \mu)]^{1/2} \right\}.$$

### Massa do Neutralizador

Segundo Den Hartog (1956), a relação de massa pode ser escolhida no seguinte intervalo:

$$\mu = \frac{m_a}{m} = 0.1 a 0.25. \quad (2.5.1.17)$$

### Exemplo:

Como uma aplicação dos conceitos mostrados até aqui, a figura 2.12 apresenta o resultado da resposta de um sistema simples e um sistema composto ao qual foi fixado um neutralizador simples com parâmetros ótimos.

O sistema primário é modelado matematicamente com material viscoelástico Tipo I e o neutralizador (sistema secundário) com material viscoelástico Tipo II. O modelo relacionado com o neutralizador dinâmico pode adotar qualquer uma das configurações apresentadas neste capítulo. Foi escolhido material viscoelástico Tipo II porque é o que vai ser utilizado na prática.

O caminho a seguir para a escolha adequada dos parâmetros do neutralizador é:

- escolha do coeficiente  $\mu$ , equação (2.5.1.17);
- aplicar a equação (2.5.1.11), com o objetivo de igualar as alturas dos pontos fixos no módulo da resposta em frequência do sistema primário, quando nele é fixado um neutralizador simples;
- cálculo das frequências correspondentes aos pontos fixos, equação (2.5.1.12);
- aplicar a equação (2.5.1.15) conseguindo desta forma que os picos do sistema composto passem por esses pontos.

Isto feito, as características do neutralizador são determinadas. As equações para a resposta do sistema primário sem neutralizador são (2.3.1.5) e (2.3.1.7) e para o sistema composto, (2.4.7).

Os dados do sistema primário são:

$$\eta = 3.0 \cdot 10^{-11}$$

$$\Omega_n = 223.6292 [seg^{-1}]$$

$$m = 10 [Kg].$$

A razão de massas escolhida:

$$\mu = 0.1.$$

Os valores ótimos obtidos:

$$m_{aot} = 0.1 m ; \eta_{aot} = 0.2533 ; \Omega_{aot} = 196.187 [seg^{-1}]$$

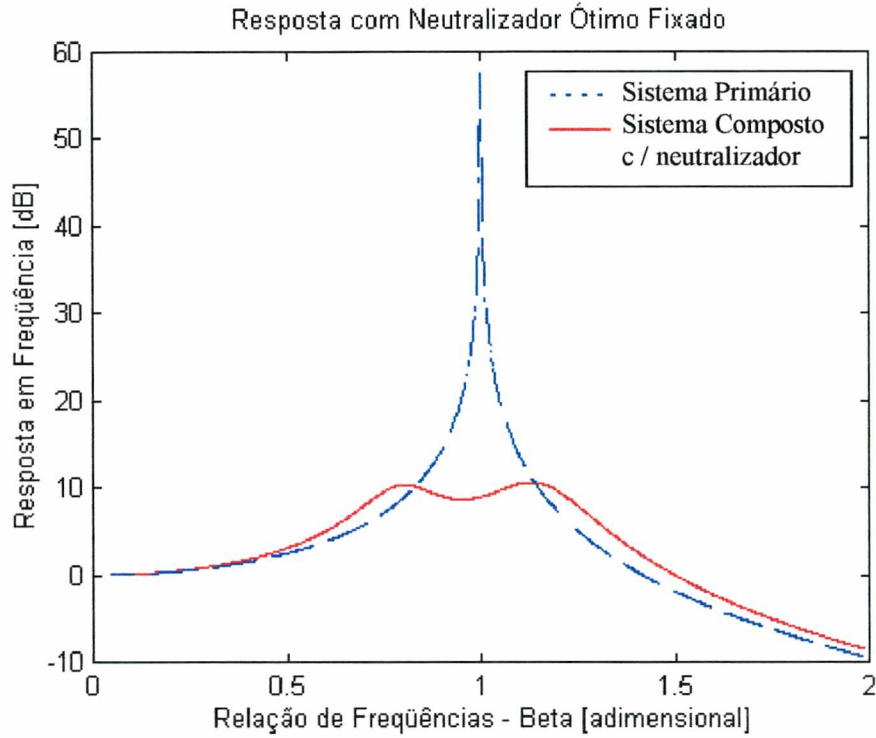


FIGURA 2.12 - Comparação entre sistema sem neutralizador e sistema com neutralizador ótimo, aplicando a técnica dos pontos fixos.

Observa-se claramente que a resposta do sistema composto é neutralizada na ressonância com a introdução do neutralizador ótimo. Note-se que ao se aplicar esta teoria tem que considerar-se o sistema primário sem amortecimento, ou desprezível, para garantir a existência dos pontos fixos. É esperado que, no caso real onde o sistema primário possua amortecimento, a resposta do sistema composto com neutralizador ótimo não resulte em uma curva tão bem comportada como na figura 2.12.

### 2.5.2 - Utilizando Técnicas de Otimização Não Linear

A outra forma de achar os parâmetros ótimos do neutralizador é aplicando técnicas de otimização não linear. Construindo uma função que representa o processo que se deseja otimizar, aplicam-se técnicas numéricas de programação não linear para consegui-lo. No caso particular de neutralizadores dinâmicos, o desejável é achar o ponto (parâmetros do neutralizador) que produz a mínima resposta possível do sistema primário.

A técnica utilizada, nesta instância, é conhecida como poliedro flexível (Himmelblau, 1972). Este método encontra o ponto ótimo de uma função ( $f: R^{nd} \rightarrow R$ ) não linear, usando informação do valor da função apenas (chamada geralmente função objetivo). A idéia é construir um poliedro no  $R^{nd}$  com  $nd + 1$  vértices e perguntar, na iteração  $k$ , o valor da função em cada um deles. Aquele vértice que possua o maior valor é abandonado e um novo poliedro será construído a partir do anterior. O vértice, de maior valor de função, gira ao redor do centro de

gravidade do poliedro atual, por exemplo. Desta forma o poliedro vai rodando, no sentido descendente / ascendente da função objetivo na procura do mínimo / máximo local mais próximo (no capítulo III será mostrado este método com maiores detalhes).

O problema de programação não linear sem restrições é apresentado geralmente como:

$$\text{minimizar } f(x) \quad (2.5.2.1)$$

sendo  $f : R^{nd} \rightarrow R$  e  $x \in R^{nd}$ .

A função  $f$  é conhecida como função objetivo. No caso de neutralizadores dinâmicos, pretende-se diminuir a resposta do sistema primário (vibrações excessivas) o máximo possível. Sendo assim, a função objetivo escolhida é:

$$Fobj(x) = m a' x \left( |H(\Omega, x)| \right) \text{ com } \Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2 \text{ arbitrários} \quad (2.5.2.2)$$

e  $H(\Omega, x)$  obtido a partir da equação (2.4.7).

O vetor variável  $x$  tem como componentes as características do neutralizador dinâmico a saber:

$$x : (\Omega_a, C_1 \eta_a).$$

O fator de perda  $\eta_a$  é afetado por uma constante  $C_1$ . Isto é realizado para se conseguir numericamente a mesma ordem de grandeza entre as componentes da variável de projeto  $x$  e, assim, um melhor desempenho no cálculo numérico iterativo. Em forma genérica

$$C_1 = (\Omega_1 + \Omega_2) / 2.$$

A faixa de frequência adotada foi:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 10 \\ \Omega_2 &= 444.34. \end{aligned}$$

A outra característica do neutralizador é  $\mu = 0.1$ , como no caso anterior.

O ponto de partida é  $x_0 = (200, 200)^T$ .

Os dados do sistema primário são:

$$\begin{aligned} \eta &= 3.0 \cdot 10^{-11} \\ \Omega_n &= 223.6292 \end{aligned}$$

A figura 2.13 mostra três curvas: a primeira corresponde ao módulo da resposta do sistema primário; a segunda corresponde à resposta do sistema composto, usando a técnica dos pontos fixos (PF) e, a terceira, resulta da aplicação de técnicas de programação não linear



(TPNL). Para esta análise considerou-se o amortecimento do sistema primário praticamente desprezível.

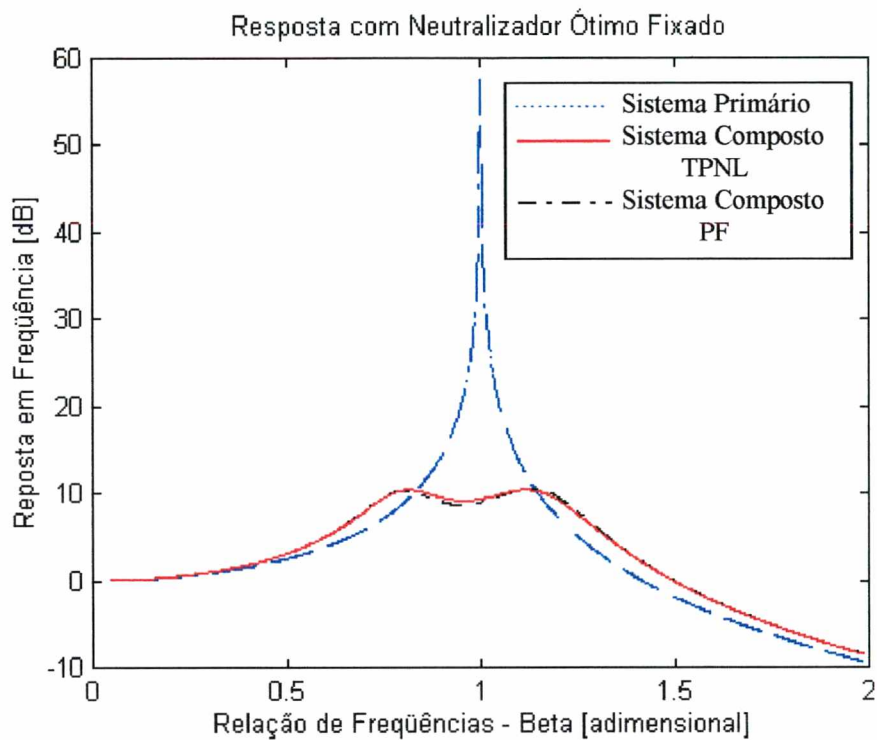


FIGURA 2.13 - Resposta com neutralizador ótimo utilizando as técnicas dos pontos fixos e programação não linear.

Observa-se, na figura 2.13, a quase sobreposição das curvas resultantes de ambas as técnicas. Os valores encontrados são mostrados na tabela 2.1.

TABELA 2.1 - Comparação entre os parâmetros ótimos obtidos via PF e via TPNL.

Variáveis	PF	TPNL
$m_a$ [Kg]	1	1
$\Omega_a$ [seg <sup>-1</sup> ]	196.1879	196.2164
$\eta_a$	0.2533	0.2711

O ponto ótimo obtido pela técnica dos PF (neste caso ponto exato) é praticamente o mesmo que o obtido utilizando TPNL. Isto é muito importante já que, esta última, é mais geral como será demonstrado em continuação e nos capítulos posteriores.

Em outra comparação supõe-se o sistema primário com um alto valor de amortecimento, como é o caso de sistemas nos quais se há implementado algum tipo de isolamento. Novamente os parâmetros do neutralizador foram calculados usando as duas técnicas antes mencionadas.

Os dados foram os mesmos que os utilizados na figura 2.13, salvo pelo fator de perda que é igual a 0.1. A figura 2.14 mostra estes resultados:

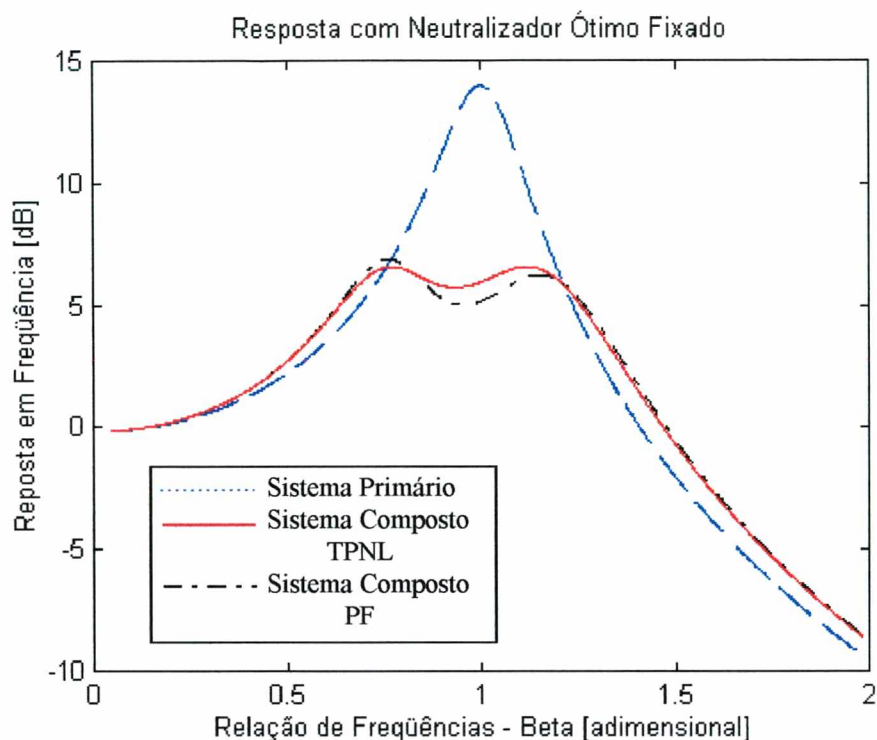


FIGURA 2.14 - Resposta com neutralizador ótimo para sistema primário com amortecimento  $\eta = 0.1$ , usando técnica dos pontos fixos e técnicas de programação não linear.

A tabela 2.2 mostra os resultados desta análise para as diferentes técnicas aplicadas.

TABELA 2.2 Comparação entre os parâmetros ótimos obtidos via PF e via TPNL, fator de perda 0.1 do sistema primário.

Variáveis	PF	TPNL
$m_a$ [Kg]	1	1
$\Omega_a$ [seg <sup>-1</sup> ]	196.1879	190.4130
$\eta_a$	0.2533	0.2868

Pode observar-se que a técnica dos pontos fixos não consegue igualar os picos de máximo da resposta. O neutralizador foi projetado considerando a estrutura primária com amortecimento nulo, quando na realidade ele possui um elevado fator de perda. Em outras palavras, o neutralizador é sintonizado partindo de uma premissa errônea ao se considerar que existem pontos fixos. É simples provar que a existência de amortecimento, no sistema primário, conduz a uma nuvem de pontos através da qual passam as diferentes respostas.

A técnica de programação não linear demonstrou ser mais ampla que a dos pontos fixos com ótimo desempenho para os diferentes casos particulares.

# **CAPÍTULO III**

## **PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS – CONCEITOS E APLICAÇÕES**

### CAPÍTULO III: PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS - CONCEITOS E APLICAÇÕES

No capítulo II foi feita uma revisão sobre neutralizador dinâmico, fixado em um sistema de um grau de liberdade, utilizando modelo viscoelástico geral. Neste capítulo será introduzida uma teoria geral para a análise de neutralizadores dinâmicos simples, fixados em sistemas com múltiplos graus de liberdade. Um enfoque diferente ao do capítulo II será apresentado para prever o efeito dos neutralizadores dinâmicos sobre uma estrutura linear qualquer.

Definição e interpretação física de parâmetros equivalentes generalizados de um neutralizador simples, modelo geral, serão introduzidas. Uma particularização para neutralizadores viscosos e viscoelástico Tipo II será apresentada com o objetivo de futuras corroborações teóricas e práticas.

Mostra-se a importância dos parâmetros equivalentes generalizados de um neutralizador simples quando introduzidos no modelo matemático de um sistema composto qualquer (sistema primário + neutralizadores), permitindo escrever a dinâmica do sistema composto apenas em função das coordenadas generalizadas físicas do sistema primário.

Uma introdução sobre sistemas dinâmicos lineares (sistemas primários) com  $n$  graus de liberdade, considerando amortecimento viscoso e amortecimento histerético proporcional, servirá como base para apresentar a teoria sobre controle de vibração e ruído com o uso de neutralizadores dinâmicos de uma forma geral.

Propõe-se uma formulação simples para fixar as massas ótimas dos neutralizadores, além da determinação de duas características utilizadas para definir totalmente estes dispositivos. Estas características podem ser: frequência natural e amortecimento ou rigidez e amortecimento, que serão consideradas no capítulo V quando, aos conceitos aqui apresentados, adicionam-se técnicas de programação não linear.

#### 3.1 - Quantidades Equivalentes Generalizadas para um Neutralizador Simples

Um enfoque diferente ao introduzido no capítulo II será realizado neste item, para neutralizadores dinâmicos que serão fixados a sistemas com múltiplos graus de liberdade. Neste presente capítulo, ao trabalhar-se com sistema primário de muitos graus de liberdade e complexo, é necessário introduzir alguns conceitos novos, chamados parâmetros equivalentes generalizados (Espíndola e Silva, 1992). Estes são extraídos a partir das quantidades dinâmicas, calculadas na base do neutralizador.

Como visto no item 2.5, o neutralizador simples é composto por uma massa conectada à base através de um elemento resiliente (figura 3.1). Este elemento pode ser visto como uma mola em paralelo com amortecedor, ou uma peça de borracha (Snowdon, 1968, Espíndola, 1990), tendo, portanto, uma rigidez complexa igual a:

$$\bar{K}(\theta, \Omega) = L\bar{G}(\theta, \Omega) = LG(\theta, \Omega)[1 + i\eta(\theta, \Omega)] \quad (3.1.1)$$

Por simplicidade de notação a letra  $\theta$ , que representa temperatura, será omitida no que segue.

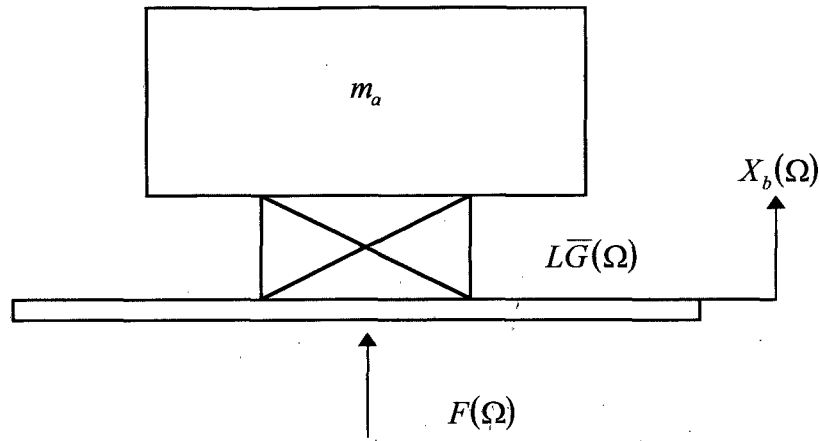


FIGURA 3.1 - Esquema de um neutralizador simples

Na figura 3.1,  $X_b(\Omega)$  e  $F(\Omega)$  são, respectivamente, as transformadas de Fourier do deslocamento  $x_b(t)$  e da força  $f(t)$  aplicada à base, que é aqui considerada como não tendo massa.

Verifica-se que a impedância na base do neutralizador (ver Anexo 1) é dada por:

$$Z_a(\Omega) = \frac{-i m_a \Omega L\bar{G}(\Omega)}{m_a \Omega^2 - L\bar{G}(\Omega)} \quad (3.1.2)$$

e a massa dinâmica

$$M_a(\Omega) = -m_a \frac{L\bar{G}(\Omega)}{m_a \Omega^2 - L\bar{G}(\Omega)}. \quad (3.1.3)$$

A frequência de antirressonância do neutralizador é definida tal que, na ausência de amortecimento, o denominador da equação (3.1.2) ou (3.1.3) iguala-se a zero:

$$\Omega_a^2 = \frac{L\bar{G}(\Omega_a)}{m_a}. \quad (3.1.4)$$

Note-se que, na ausência de amortecimento,  $\bar{G}(\Omega) = G(\Omega)$ .

Assim, quando a frequência coincide com (3.1.4), as quantidades dinâmicas, medidas na base do sistema simples, tomam valores elevados. Na ausência de amortecimento precisa-se de uma força infinita para provocar um deslocamento finito da base. Este conceito é fundamental para explicar o significado físico do comportamento dos neutralizadores quando fixados em um sistema qualquer. A frequência de antirressonância obtida a partir da massa dinâmica na base do sistema simples coincide com a frequência de ressonância medida a partir da resposta na massa do mesmo sistema.

Definindo:  $L\bar{G}(\Omega) = L\bar{G}(\Omega_a)r(\Omega)$  e  $\varepsilon_a = \frac{\Omega}{\Omega_a}$  as equações (3.1.2) e (3.1.3) ficam:

$$Z_a(\Omega) = -i m_a \Omega \frac{r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]} \quad (3.1.5)$$



$$M_a(\Omega) = -m_a \frac{r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]} \quad (3.1.6)$$

O amortecimento viscoso equivalente generalizado é definido como a parte real da impedância dinâmica, equação (3.1.5), portanto:

$$c_e(\Omega) = m_a \Omega_a \frac{r(\Omega) \eta(\Omega) \varepsilon_a^3}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega) \eta(\Omega)]^2} \quad (3.1.7)$$

Por outro lado, a massa generalizada equivalente é a parte real da massa dinâmica, equação (3.1.6):

$$m_e(\Omega) = -m_a \frac{r(\Omega) \{ \varepsilon_a^2 - r(\Omega)[1 + \eta^2(\Omega)] \}}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega) \eta(\Omega)]^2} \quad (3.1.8)$$

Distribuindo convenientemente estes parâmetros, chega-se a uma equivalência dinâmica entre os modelos da figura 3.2 (ver Anexo 1).

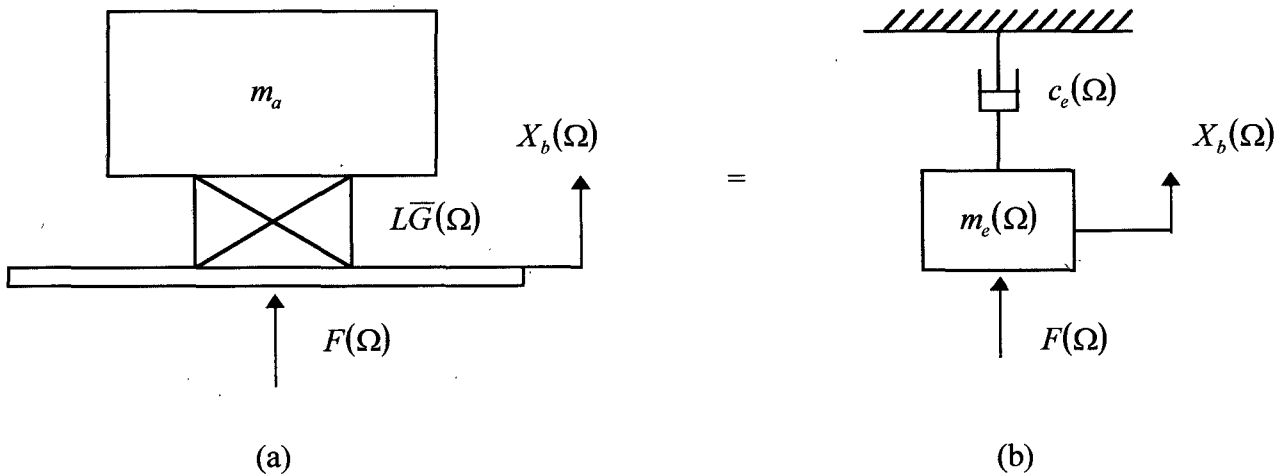


FIGURA 3.2 - Diagramas equivalentes: (a) com neutralizador real sob base desprovida de massa (b) com parâmetros equivalentes generalizados.

A impedância do sistema (b) na figura 3.2 é dada por:

$$Z_a(\Omega) = c_e(\Omega) + i\Omega m_e(\Omega) \quad (3.1.9)$$

Substituindo as equações (3.1.7) e (3.1.8) em (3.1.9), a equação (3.1.5) será reproduzida. A equivalência mostrada na figura 3.2 significa que o sistema primário “sente” o neutralizador como uma massa  $m_e(\Omega)$ , fixada ao longo das coordenadas generalizadas  $x_b(t)$  e um amortecedor viscoso de constante  $c_e(\Omega)$ , ligado à terra (Espíndola e Silva, 1992).

Como consequência do exposto acima, considere-se o sistema primário geral, figura 3.3, ao qual é fixado um neutralizador de um grau de liberdade, ao longo da coordenada física  $q(t)$ .

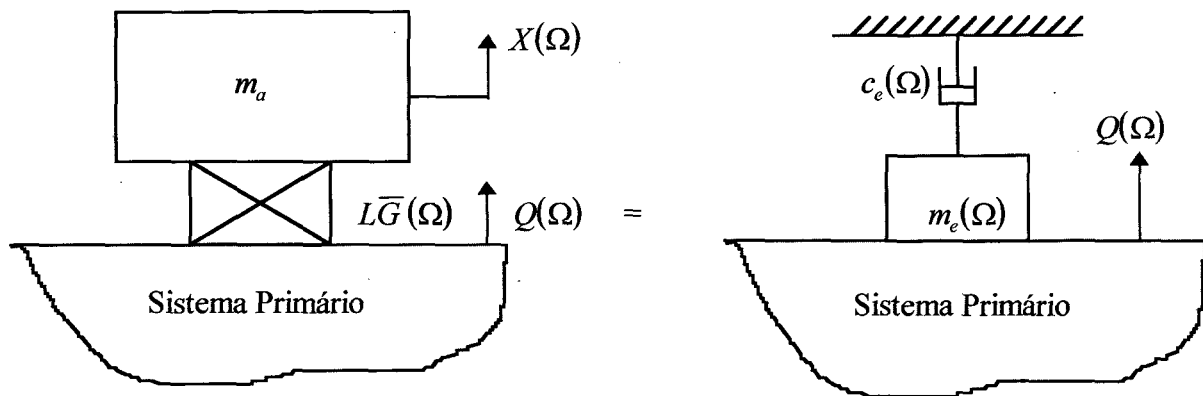


FIGURA 3.3 - Neutralizador simples sobre um sistema primário geral.

A importância de trabalhar com o sistema equivalente é que a dinâmica do sistema resultante (primário + neutralizador), pode ser formulada em termos das coordenadas físicas do sistema primário, apesar da adição de graus de liberdade introduzida pelos neutralizadores.

As quantidades equivalentes generalizadas, encontradas acima, são para um neutralizador simples, com características gerais. É importante, na prática, achar as quantidades equivalentes generalizadas para casos particulares de neutralizadores.

### 3.1.1 - Neutralizador Simples - Modelo Viscoso

Se o neutralizador for do tipo viscoso, tomam-se os seguintes parâmetros de razão de rigidez dinâmicas e fator de perda (ver anexo 2 ou expressão (2.3.1.6)):

$$r(\Omega) = 1$$

$$\eta(\Omega) = 2 \xi_a \varepsilon_a$$

$$c_e(\Omega) = m_a \Omega_a \frac{2 \xi_a \varepsilon_a^4}{\left[ \varepsilon_a^2 - 1 \right]^2 + \left[ 2 \xi_a \varepsilon_a \right]^2} \quad (3.1.1.1)$$

$$m_e(\Omega) = -m_a \frac{\left\{ \varepsilon_a^2 - \left[ 1 + \left( 2 \xi_a \varepsilon_a \right)^2 \right] \right\}}{\left[ \varepsilon_a^2 - 1 \right]^2 + \left[ 2 \xi_a \varepsilon_a \right]^2} \quad (3.1.1.2)$$

### 3.1.2 - Neutralizador Simples - Modelo Viscoelástico

Na região de transição, o material viscoelástico comporta-se de forma que  $G(\Omega)$  é aproximadamente proporcional à frequência. Como definido na equação (2.3.1.8),

$$r(\Omega) = \frac{K(\Omega)}{K(\Omega_a)} = \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_a)} = \frac{\alpha \Omega}{\alpha \Omega_a} = \varepsilon_a \text{ e } \eta(\Omega) \text{ é considerado constante, com uma pequena}$$

margem de erro. Sendo assim, os parâmetros equivalentes são dados por:

$$r(\Omega) = \frac{K(\Omega)}{K(\Omega_a)} = \frac{LG(\Omega)}{LG(\Omega_a)} = \frac{\alpha\Omega}{\alpha\Omega_a} = \varepsilon_a$$

$$\eta(\Omega) = \eta = cte.$$

$$c_e(\Omega) = m_a \Omega_a \frac{\eta \varepsilon_a^2}{[\varepsilon_a - 1]^2 + [\eta]^2} \quad (3.1.2.1)$$

$$m_e(\Omega) = -m_a \frac{\varepsilon_a - [1 + \eta^2]}{[\varepsilon_a - 1]^2 + [\eta]^2} \quad (3.1.2.2)$$

## 3.2 - Sistemas Lineares com Múltiplos Graus de Liberdade

É necessário introduzir alguns conceitos básicos sobre resposta de um sistema linear com múltiplos graus de liberdade. Isto servirá como introdução à teoria apresentada no item 3.3 sobre neutralizadores dinâmicos atuando em sistemas primários complexos.

### 3.2.1 - Modelo Viscoso

A equação dinâmica que governa o movimento de um sistema linear, invariante no tempo, causal, para múltiplos graus de liberdade ( $n$ ) é:

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = f(t). \quad (3.2.1.1)$$

Considerando a solução de vibração livre ( $f(t) = 0$ ) e assumindo que esta toma a forma  $q(t) = \phi e^{st}$ , o sistema de equações, dado em (3.2.1.1), fica:

$$[s^2 M + sC + K] \phi e^{st} = 0, \quad (3.2.1.2)$$

ou

$$[s^2 M + sC + K] \phi = 0 \quad (3.2.1.3)$$

já que  $e^{st}$  é diferente de zero.

A solução não trivial de (3.2.1.3) é:

$$\det[K + sC + s^2 M] = 0. \quad (3.2.1.4)$$

Do polinômio formado na equação (3.2.1.4) obtém-se  $2n$  valores de  $s$  ( $s_1, s_2, \dots, s_{2n}$ ). Substituindo cada valor  $s_j$ , com  $j = 1$  a  $2n$ , na equação (3.2.1.3), determina-se um vetor  $\phi_j$  de valores relativos. As raízes  $s_j$  são conhecidas como autovalores e  $\phi_j$ , os autovetores

correspondentes. Os autovalores dependem somente das características do sistema ou dos parâmetros do modelo, tais como inerciais, elásticos e dissipadores (Espíndola, 1986).

Os  $2n$  autovalores podem tomar diferentes quantidades, dependendo das características do problema. Podem ser reais e distintos, reais e iguais ou complexos conjugados. Na expressão (3.2.1.5), apresenta-se como caso geral a forma complexa, sendo que esta sempre estará acompanhada do seu par complexo conjugado.

$$\begin{aligned} s_j &= \delta_j + i\nu_j \\ s_j^* &= \delta_j - i\nu_j \end{aligned} \quad (3.2.1.5)$$

Para cada par de autovalores complexos conjugados, tem-se um par de autovetores correspondentes, também complexos conjugados.

### Problema de Autovalores não Amortecido

Primeiramente, por razões que serão vistas oportunamente, examinar-se-á o caso particular do problema de autovalores não amortecido, embora os sistemas físicos sempre tenham amortecimento. O problema (3.2.1.3) toma a forma:

$$[s^2 M + K]\phi = 0. \quad (3.2.1.6)$$

Demonstra-se que os autovalores do problema (3.2.1.6) (Espíndola, 1986) são imaginários puros e conjugados:

$$\begin{aligned} s_j &= i\Omega_j \\ s_j^* &= -i\Omega_j \end{aligned} \quad (3.2.1.7)$$

Substituindo (3.2.1.7) em (3.2.1.6) o problema de autovalores toma a forma:

$$K\phi = \Omega^2 M\phi \quad (3.2.1.8)$$

Pode-se visualizar, de (3.2.1.8), que os autovetores correspondentes a  $s_j$  e  $s_j^*$  são reais e iguais. A solução deste problema conduz diretamente a  $\Omega_j^2$  e  $\phi_j$ . Confunde-se muitas vezes, por esta razão,  $\Omega_j^2$  com o  $j$ -ésimo autovalor do sistema, quando na realidade o autovalor é dado pela equação (3.2.1.7).

Em forma matricial, a solução completa pode ser apresentada como:

$$diag(\Omega_j^2) \quad , \quad \Phi \quad (3.2.1.9)$$

onde  $\Omega_j^2$  é conhecido como o  $j$ -ésimo autovalor (mais precisamente o autovalor é  $s = i\Omega$ ) ou frequência natural ao quadrado e  $\phi_j$  é o correspondente autovetor ou modo de vibrar (Ewins, 1984).

O conjunto de matrizes (3.2.1.9) é conhecido como **modelo modal** e as matrizes  $M$  e  $K$  formam o **modelo espacial**.

É importante notar que a matriz de autovalores é única, diferentemente da matriz de autovetores. Isto pode ser demonstrado de forma simples uma vez que existirão infinitos vetores, a menos de uma constante, que satisfazem (3.2.1.8) para um dado  $\Omega_j^2$ .

Demonstra-se (Espíndola, 1986, Ewins, 1984) que o modelo modal tem a seguinte propriedade conhecida como ortogonalidade:

$$\Phi^T M \Phi = \text{diag}(m_r) \quad (3.2.1.10)$$

$$\Phi^T K \Phi = \text{diag}(k_r)$$

onde

$$\text{diag}(\Omega_r^2) = (\text{diag}(m_r))^{-1} \text{diag}(k_r).$$

Cada componente da expressão anterior é  $\Omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r}$ .

Os parâmetros  $m_r$  e  $k_r$  são denominados massa e rigidez modal do  $r$ -ésimo (com  $r = 1, n$ ) modo, respectivamente.

Uma vez que cada autovetor é normalizado através da raiz quadrada da massa modal as seguintes relações também serão válidas:

$$\Psi^T M \Psi = I \quad (3.2.1.11)$$

$$\Psi^T K \Psi = \text{diag}(\Omega_r^2)$$

sendo  $\psi_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \phi_r$ .

### Modelo Viscoso Proporcional

Se a matriz de amortecimento viscoso  $C$  é proporcional às matrizes de rigidez e massa,

$$C = \beta K + \gamma M, \quad (3.2.1.12)$$

é fácil provar por simples inspeção que (3.2.1.12) também será diagonalizada através dos autovetores do problema não amortecido. Assim:

$$\Psi^T C \Psi = \beta \text{diag}(k_r) + \gamma \text{diag}(m_r) = \text{diag}(c_r). \quad (3.2.1.13)$$

O coeficiente  $c_r$  é denominado amortecimento modal e  $r = 1, n$ .

Define-se amortecimento crítico como

$$c_{cr} = 2 m_r \Omega_r .$$

Define-se a relação de amortecimento modal ( $\xi$ ) como a relação entre o amortecimento modal do sistema  $c_r$  e o amortecimento crítico  $c_{cr}$

$$\xi = \frac{c_r}{c_{cr}} . \quad (3.2.1.14)$$

Uma forma alternativa para escrever o coeficiente de amortecimento é através do produto entre o amortecimento crítico e a relação de amortecimento. Sendo assim, o coeficiente de amortecimento modal fica:

$$c_r = 2 \xi \Omega_r m_r . \quad (3.2.1.15)$$

Demonstra-se (Ewins, 1984) que, para sistemas modelados com amortecimento viscoso proporcional, as frequências naturais são complexas com a parte oscilatória dada por:

$$\nu_r = \Omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (3.2.1.16)$$

onde

$$\Omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} .$$

A parte real, que representa o decaimento, é dada por:

$$\delta_r = \xi_r \Omega_r . \quad (3.2.1.17)$$

Isto será visualizado a seguir na apresentação da resposta em frequência.

### Coordenadas Principais - Resposta em Frequência

Para ilustrar a importância do modelo modal, escreve-se a equação (3.2.1.1) no domínio da frequência através da transformada de Fourier. Isto é feito por conveniência e sem perda de generalidade.

O sistema de equações para sistemas lineares com múltiplos graus de liberdade, no domínio da frequência, é dado por:

$$\left[ -\Omega^2 M + i\Omega C + K \right] Q(\Omega) = F(\Omega) \quad (3.2.1.18)$$

sendo  $F(\Omega)$  e  $Q(\Omega)$  a transformada de Fourier de  $f(t)$  e  $q(t)$ , respectivamente.

Realizando a seguinte transformação de coordenadas:

$$Q(\Omega) = \Psi P(\Omega) \quad (3.2.1.19)$$

onde  $Q(\Omega)$  são as coordenadas físicas (também conhecidas como coordenadas generalizadas) e  $P(\Omega)$  as coordenadas principais que, geralmente, não têm sentido físico. Substituindo a expressão (3.2.1.19) em (3.2.1.18) e pré-multiplicando esta última por  $\Psi^T$ , obtém-se:

$$\left[ -\Omega^2 I + i\Omega \text{diag}(2\xi_r \Omega_r) + \text{diag}(\Omega_r^2) \right] P(\Omega) = N(\Omega) \quad , \text{ com } r = 1, n \quad (3.2.1.20)$$

$$\text{e } N(\Omega) = \Psi^T F(\Omega) .$$

O espaço gerado por esta transformação recebe o nome de **espaço modal** e tem a característica fundamental de que, nele, o sistema de equações pode estar desacoplado. Isto significa que pode resolver-se de forma individual cada linha  $r$  da equação (3.2.1.20), da mesma forma que para sistema simples com um grau de liberdade. Uma linha genérica  $r$  deste sistema de equações será:

$$\left( -\Omega^2 + i\Omega 2\xi_r \Omega_r + \Omega_r^2 \right) P_r(\Omega) = N_r(\Omega) . \quad (3.2.1.21)$$

Igualando o primeiro termo da equação (3.2.1.21) a zero, a frequência natural para sistemas viscosos proporcional pode ser encontrada (ver equação (3.2.1.16) e (3.2.1.17)).

Definindo a matriz  $D_0$  como:

$$D_0 = \left[ -\Omega^2 I + i\Omega \text{diag}(2\xi_j \Omega_j) + \text{diag}(\Omega_j^2) \right] \quad (3.2.1.22)$$

as coordenadas principais podem ser calculadas. Assim,

$$P(\Omega) = D_0^{-1} N(\Omega) \quad (3.2.1.23)$$

ou

$$P(\Omega) = D_0^{-1} \Psi^T F(\Omega) . \quad (3.2.1.24)$$

Pode-se observar que a matriz  $D_0$  é diagonal e, portanto, sua inversa calcula-se simplesmente invertendo cada elemento da diagonal. Esta matriz é denominada matriz resposta em frequência do espaço modal.

Pré-multiplicando à equação (3.2.1.24) pela matriz  $\Psi$ , obtém-se a resposta em coordenadas generalizadas.

$$Q(\Omega) = \Psi D_0^{-1} \Psi^T F(\Omega) \quad (3.2.1.25)$$

Em analogia com sistemas de um grau de liberdade, define-se a matriz resposta em frequência em coordenadas físicas como:

$$\alpha(\Omega) = \Psi D_0^{-1} \Psi^T . \quad (3.2.1.26)$$

Um elemento particular de (3.2.1.26) é:

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\Psi_{kr} \Psi_{sr}}{-\Omega^2 + \Omega_r^2 + i2\xi_r \Omega_r \Omega} \quad (3.2.1.27)$$

A função  $\alpha_{ks}(\Omega)$  representa a resposta em frequência do sistema da coordenada generalizada  $k$  quando excitado na coordenada  $s$ .

### 3.2.2 - Modelo Histerético

Sabe-se, (Harris e Crede, 1976, Espíndola, 1987 entre outros), que a energia dissipada por ciclo de movimento harmônico em um mecanismo viscoso, é dada por:

$$E_d = \pi c \Omega X^2, \quad (3.2.2.1)$$

onde  $c$  é a constante de amortecimento viscoso,  $\Omega$  a frequência circular e  $X$  a amplitude do deslocamento (figura 3.4).

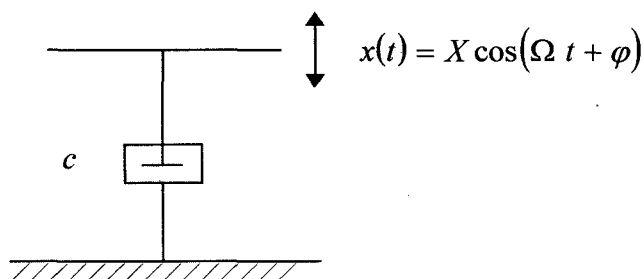


FIGURA 3.4 - Modelo viscoso

Da expressão (3.2.2.1), conclui-se que a energia dissipada por ciclo é diretamente proporcional à frequência e proporcional à amplitude ao quadrado.

Quando uma estrutura real, ou parte dela, é excitada por um movimento harmônico verifica-se, entretanto, que não existe esta proporcionalidade entre energia dissipada por ciclo e frequência.

A energia depende de alguma forma da frequência, mas nunca de maneira proporcional (Snowdon, 1968). Para estruturas ou peças metálicas a dependência da energia dissipada por ciclo depende apenas discretamente da frequência.

Os mecanismos de extração de energia mecânica de uma estrutura completa são muitos e complexos, e em nada assemelham-se ao modelo viscoso. Para se ter uma idéia, basta pensar na perda de energia via contornos e via o meio elástico em que a estrutura esteja imersa (ar, água), entre outras formas de extração. Qualquer tentativa de levar em conta os vários mecanismos de dissipação e extração de energia mecânica, individualmente, em uma análise matemática do movimento do sistema, é impraticável.

Uma forma de considerar a dissipação de energia é modificar o modelo viscoso, gerando outros modelos de simples manipulação matemática. O modelo de amortecimento histerético surge dessas considerações. Supõe-se, inicialmente, que o modelo viscoso sobreviva, porém com a constante de amortecimento dependente da frequência (o termo “constante” aqui refere-se ao tempo, apenas).



Segundo, supõe-se que esta constante de amortecimento viscoso seja da forma

$$c(\Omega) = \frac{h(\Omega)}{\Omega}. \quad (3.2.2.2)$$

Desta forma a expressão (3.2.2.1) fica:

$$E_d = \pi h(\Omega) X^2. \quad (3.2.2.3)$$

A dependência de  $h(\Omega)$  da frequência é, em geral, estabelecida experimentalmente. Como, para estruturas metálicas, ou peças, a dependência de  $h(\Omega)$  em frequência é discreta, costuma-se, nesses casos, tomar  $h$  constante, de sorte que, aproximadamente

$$E_d = \pi h X^2. \quad (3.2.2.4)$$

Para uma estrutura completa, ou mesmo uma simples peça, supõe-se, em analogia com o caso viscoso, que inúmeros mecanismos histeréticos estejam distribuídos, de forma que, para uma estrutura excitada em movimento harmônico de frequência  $\Omega$ , a matriz de amortecimento fica:

$$C = \frac{1}{\Omega} H, \quad (3.2.2.5)$$

onde  $H$  é a matriz de amortecimento histerético. Note-se que, como  $C$  é simétrica,  $H$  também o será.

Para um sistema discreto, de múltiplos graus de liberdade, excitado por um vetor de forças harmônicas (todas) de mesma frequência, a equação diferencial fica:

$$M \ddot{q}(t) + \frac{1}{\Omega} H \dot{q}(t) + K q(t) = f(t). \quad (3.2.2.6)$$

É importante notar as restrições acima: a expressão (3.2.2.6) é válida apenas quando o segundo membro for um vetor de forças harmônicas, todos de mesma frequência. Isto pode ser explicado, uma vez que, se a excitação possui-se um espectro de frequências amplo, a variável  $\Omega$  do primeiro membro fica sem sentido. A restrição acima deve ficar bem clara, caso contrário a equação (3.2.2.6) estará misturando os domínios de tempo e frequência (Espíndola, 1986).

Para poder usar o modelo histerético sem restrições, escreve-se a equação (3.2.2.6) no domínio da frequência,

$$[-\Omega^2 M + i H + K] Q(\Omega) = F(\Omega). \quad (3.2.2.7)$$

No caso de  $K$  não ser singular pode-se escrever:

$$K + i H = K (I + i K^{-1} H) = K (I + i \eta). \quad (3.2.2.8)$$

A matriz  $\eta$  é chamada matriz de perda e seus elementos são os fatores de perda.

### Problema de Autovalores Modelo Histerético

Considere-se o seguinte problema de autovalores:

$$\left[ i H + K \right] \phi = s M \phi. \quad (3.2.2.9)$$

Este problema fornece  $n$  autovalores  $s_j$  e  $n$  correspondentes autovetores  $\phi_j$ , com  $j = 1, n$ .

Tanto os autovalores como os autovetores são complexos. Note-se que, como a matriz de rigidez complexa é de fato complexa, não se espera que os autovalores  $s_j$  ocorram em pares conjugados.

As condições de ortogonalidade mostradas no item 3.2.1 podem ser expressas aqui como:

$$\phi_j^T M \phi_i = m_j \delta_{ij} \quad (3.2.2.10)$$

$$\phi_j^T \left[ i H + K \right] \phi_i = k_j \delta_{ij}$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}.$$

Definindo a matriz modal

$$\Phi \triangleq \left[ \left\{ \phi \right\}_1, \left\{ \phi \right\}_2, \dots, \left\{ \phi \right\}_n \right], \quad (3.2.2.11)$$

as relações de ortogonalidade ficam:

$$\Phi^T M \Phi = \text{diag}(m_j) \quad (3.2.2.12)$$

$$\Phi^T \left[ i H + K \right] \Phi = \text{diag}(k_j).$$

Considere-se novamente a expressão (3.2.2.9) para o  $j$ -ésimo autovetor:

$$\left[ i H + K \right] \phi_j = s_j M \phi_j.$$

Pré-multiplicando pelo transposto de  $\phi_j$  e tendo em vista as relações (3.2.2.10), obtém-se

$$s_j = \frac{k_j}{m_j}. \quad (3.2.2.13)$$

Note-se que  $m_j$  e  $k_j$  são, em geral, complexos.

Os autovetores podem ser ortonormalizados, de forma tal que  $m_j = 1$  com  $j = 1, n$ . Neste caso a equação (3.2.2.13) fica

$$s_j = k_j, \text{ numericamente} \quad (3.2.2.14)$$

e as relações (3.2.2.12)

$$\Psi^T M \Psi = I \quad (3.2.2.15)$$

$$\Psi^T [i H + K] \Psi = \text{diag}(s_j).$$

Da primeira equação de (3.2.2.15) pode-se deduzir que a inversa da matriz modal é dada por:

$$\Psi^{-1} = \Psi^T M. \quad (3.2.2.16)$$

### Resposta em Freqüência

Como no caso viscoso, fazendo-se a seguinte transformação:

$$Q(\Omega) = \Psi^T P(\Omega), \quad (3.2.2.17)$$

levando  $Q(\Omega)$  à expressão (3.2.2.7) e pré-multiplicando por  $\Psi^T$  obtém-se:

$$\left[ -\Omega^2 I + \text{diag}(s_j) \right] P(\Omega) = N(\Omega), \quad (3.2.2.18)$$

sendo

$$N(\Omega) = \Psi^T F(\Omega). \quad (3.2.2.19)$$

Para a  $j$ -ésima componente  $N_j(\Omega)$ , vale a seguinte expressão:

$$N_j(\Omega) = \sum_{r=1}^n \psi_{rj} F_r(\Omega). \quad (3.2.2.20)$$

A expressão (3.2.2.18) representa um sistema de equações desacoplado do tipo

$$(-\Omega^2 + s_j) P_j(\Omega) = N_j(\Omega), \quad (3.2.2.21)$$

podendo isolar a coordenada principal como:

$$P_j(\Omega) = \frac{N_j(\Omega)}{(s_j - \Omega^2)}. \quad (3.2.2.22)$$

Notando que (3.2.2.17) pode ser escrita da forma:

$$Q(\Omega) = \sum_{j=1}^n \psi_j P_j(\Omega), \quad (3.2.2.23)$$

obtem-se pela substituição de (3.2.2.22) e (3.2.2.20):

$$Q(\Omega) = \sum_{j=1}^n \psi_j \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{rj}}{s_j - \Omega^2} F_r(\Omega). \quad (3.2.2.24)$$

Esta expressão fornece a resposta, no domínio da frequência, do sistema a um vetor de forças. Supondo agora que todas as componentes do vetor força sejam nulas, exceto uma ( $F_s(\Omega)$ ), a expressão (3.2.2.24) fica:

$$Q(\Omega) = \left( \sum_{j=1}^n \psi_j \sum_{r=1}^n \frac{\psi_{rj}}{s_j - \Omega^2} \right) F_s(\Omega). \quad (3.2.2.25)$$

Esta é, pois, a resposta no domínio da frequência a uma força associada à s-ésima coordenada generalizada. Desta expressão pode-se destacar a resposta na k-ésima coordenada:

$$Q_k(\Omega) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\psi_{kj} \psi_{sj}}{s_j - \Omega^2} \right) F_s(\Omega). \quad (3.2.2.26)$$

O produto no numerador da expressão (3.2.2.26) é denominado constante modal:

$$^j A_{ks} = \psi_{kj} \psi_{sj} \quad (3.2.2.27)$$

O termo entre parênteses em (3.2.2.26) é a receptância ou resposta em frequência do deslocamento do sistema:

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^n \frac{^j A_{ks}}{s_j - \Omega^2} \quad (3.2.2.28)$$

A receptância, equação (3.2.2.28), pode receber uma forma mais elaborada. Viu-se que  $s_j = k_j$ , ou

$$s_j = \psi_j^T K \psi_j + i \psi_j^T H \psi_j. \quad (3.2.2.29)$$

Como os autovetores são complexos, os produtos triplos acima também o serão. Como  $s_j$  tem unidade de frequência circular ao quadrado (vide 3.2.2.28), é conveniente representá-lo como parte real e imaginária, assim:

$$s_j = \Omega_j^2 + i h_j, \quad (3.2.2.30)$$

ou

$$s_j = \Omega_j^2 (1 + i\eta_j) \quad (3.2.2.31)$$

onde

$$\eta_j = \frac{h_j}{\Omega_j^2} \quad (3.2.2.32)$$

À  $\Omega_j$  atribui-se o nome de frequência natural do  $j$ -ésimo modo, a  $\eta_j$  fator de perda modal do  $j$ -ésimo modo e  $h_j$  é o coeficiente modal de histerese.

Com esta nova notação a receptância assume a seguinte forma:

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^n \frac{{}^j A_{ks}}{\Omega_j^2 - \Omega^2 + i\eta_j \Omega_j^2} \quad (3.2.2.33)$$

A expressão (3.2.2.28) é geralmente a mais usada em problemas de identificação, enquanto que esta última é mais adequada à discussão do comportamento do sistema. Importante também notar que o modelo matemático proposto na identificação de parâmetros utiliza os autovetores ortonormalizados pela matriz de massa.

Em forma matricial, a partir da equação (3.2.2.7) e trabalhando no espaço modal, a receptância em coordenadas físicas do sistema é, considerando amortecimento histerético, dada por:

$$\alpha(\Omega) = \Psi D_0^{-1} \Psi^T \quad (3.2.2.34)$$

onde

$$D_0 = \text{diag}(\Omega_j^2 - \Omega^2 + i\eta_j \Omega_j^2). \quad (3.2.2.35)$$

### Amortecimento Histerético Proporcional

Uma hipótese muito importante é a de que matriz de histerese é proporcional a matriz de rigidez, caso em que a matriz de perda é dada por

$$\eta = \beta I \quad (3.2.2.36)$$

Este caso ocorre em sistemas de isolamento de máquinas com isoladores elastoméricos (Espíndola, 1987). A expressão da proporcionalidade usada aqui será a forma geral:

$$H = \beta K + \gamma M \quad (3.2.2.37)$$

O problema de autovalores (3.2.2.9) fica:

$$[K + i(\beta K + \gamma M)] \phi = s M \phi \quad (3.2.2.38)$$

Todas as matrizes que aparecem nesta equação são diagonalizáveis pela matriz modal do problema:

$$K \phi = \lambda M \phi. \quad (3.2.2.39)$$

Isto significa que os autovetores do problema (3.2.2.39) também o são do (3.2.2.38), embora os autovalores sejam distintos.

Rescrevendo (3.2.2.38) para um índice  $j$  e pré-multiplicando por  $\phi_j^T$ , obtém-se

$$\Omega_j^2 + i(\beta \Omega_j^2 + \gamma) = s_j \quad (3.2.2.40)$$

Note-se que  $\Omega_j^2$  é real em (3.2.2.40) e  $\Omega_j$  representa a  $j$ -ésima frequência natural não amortecida.

A equação anterior pode ser colocada sob a forma

$$s_j = \Omega_j^2 \left( 1 + i \left( \beta + \frac{\gamma}{\Omega_j^2} \right) \right),$$

ou

$$s_j = \Omega_j^2 (1 + i \eta_j) \quad (3.2.2.41)$$

semelhante a (3.2.2.31). Entretanto, nesta, o amortecimento é proporcional tornando  $\Omega_j^2$  diferente, em valor, daquele em (3.2.2.31).

A expressão da receptância é precisamente aquela apresentada em (3.2.2.28), porém aqui, as constantes modais são reais.

### Discussão Complementar

A função resposta em frequência, sendo o quociente de duas transformações (resposta e excitação) é, necessariamente, uma função hermitiana da frequência, entendendo como função hermitiana:

$$\alpha_{ks}(-\Omega) = \alpha_{ks}^*(\Omega). \quad (3.2.2.42)$$

Entretanto a expressão (3.2.2.28) ou (3.2.2.33), construídas para o modelo histerético não são hermitianas e, portanto, não podem ser rigorosamente consideradas funções resposta em frequência (Espíndola, 1987). De fato, a transformada inversa de (3.2.2.28) ou (3.2.2.33), se existe, não será uma função real do tempo e sim complexa, pelo fato dessas funções não serem hermitianas.

Isto se deve às derivações e definições anteriores, onde não se levou em consideração o domínio completo de  $\Omega$ , que deve variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

A expressão (3.2.2.2), para ser coerente com esta extensão, mantendo  $\alpha(\Omega) \geq 0$ , exige que  $h(\Omega)$  seja uma função ímpar de frequência:

$$h(\Omega) \begin{cases} > 0 & \text{se } \Omega > 0 \\ = 0 & \text{se } \Omega = 0 \\ < 0 & \text{se } \Omega < 0 \end{cases} \quad (3.2.2.43)$$

A constante de amortecimento histerético  $h$  deve, conseqüentemente, estar contida na seguinte definição:

$$h(\Omega) = h \operatorname{sgn}(\Omega) , \quad (3.2.2.44)$$

onde a função “signum” é definida assim:

$$\operatorname{sgn}(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Omega > 0 \\ 0 & \text{se } \Omega = 0 \\ -1 & \text{se } \Omega < 0 \end{cases} \quad (3.2.2.45)$$

A expressão (3.2.2.5) fica, então:

$$C(\Omega) = \frac{1}{\Omega} H \operatorname{sgn}(\Omega) \quad (3.2.2.46)$$

e a (3.2.2.7)

$$[-\Omega^2 M + iH \operatorname{sgn}(\Omega) + K] Q(\Omega) = F(\Omega) . \quad (3.2.2.47)$$

Em lugar de (3.2.2.8), dever-se-ia escrever:

$$K + iH \operatorname{sgn}(\Omega) = K (I + i\eta \operatorname{sgn}(\Omega)) \quad (3.2.2.48)$$

onde

$\eta \operatorname{sgn}(\Omega)$  é a matriz de perdas.

O problema de autovalores, (3.2.2.9) deve ser escrito como:

$$[iH \operatorname{sgn}(\Omega) + K] \phi = s M \phi \quad (3.2.2.49)$$

Alternativamente, (3.2.2.49) pode ser rescrita assim:

$$\begin{aligned} [iH + K] \phi &= s M \phi & , \Omega > 0 \\ K \theta &= \lambda M \theta & , \Omega = 0 \\ [-iH + K] \psi &= r M \psi & , \Omega < 0. \end{aligned} \quad (3.2.2.50)$$

Tomando o conjugado da primeira expressão da equação (3.2.2.50), têm-se:

$$[-iH + K]\phi^* = s^* M \phi^* \quad (3.2.2.51)$$

Comparando esta equação com a última expressão da (3.2.2.50), observa-se que:

$$\begin{aligned} \psi &= \phi^* \\ r &= s^* \end{aligned}$$

Portanto, o problema de autovalores para frequências negativas fica da forma mostrada na equação (3.2.2.51). Os autovalores podem então ser escritos assim:

$$s_j = \Omega_j^2 (1 + i\eta_j \operatorname{sgn}(\Omega)). \quad (3.2.2.52)$$

Finalmente função resposta em frequência será:

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\Re(A_{ks}) + i \Im(A_{ks}) \operatorname{sgn}(\Omega)}{\Omega_j^2 - \Omega^2 + i\Omega_j^2 \eta_j \operatorname{sgn}(\Omega)} \quad (3.2.2.53)$$

Nota-se claramente que, com essas considerações adicionais, a resposta em frequência torna-se hermitiana.

Note-se, também, que as expressões (3.2.2.3) e (3.2.2.4) pressupõem  $\Omega > 0$ . Caso considere todo o domínio  $(-\infty < \Omega < +\infty)$ ,  $h(\Omega)$  e  $h$ , nessas fórmulas, devem ser substituídos por (3.2.2.44).

Implícito também está o fato de que:

$$\begin{aligned} \theta &= \Re(\phi) \\ e \\ \lambda &= \Re(s) \end{aligned}$$

( $\Re$  parte real), na primeira equação de (3.2.2.50).

### 3.3 - Neutralizadores Dinâmicos Fixados em Sistemas Primários Complexos - Modelo Viscoso Proporcional

Considera-se o caso particular onde o sistema primário é modelado através de amortecimento viscoso proporcional. Se o modelo for outro (p.ex. histerético) seguem-se os mesmos passos apresentados com as correspondentes mudanças inerentes a esse modelo.

Se vários neutralizadores são adicionados a um sistema primário, ou estrutura, a equação de movimento no domínio da frequência pode ser escrita como:

$$[-\Omega^2 \tilde{M} + i\Omega \tilde{C} + K]Q(\Omega) = F(\Omega) \quad (3.3.1)$$



sendo

$\tilde{M}$  e  $\tilde{C}$  a massa e o amortecimento respectivamente do sistema composto.

Como ilustração do exposto, suponha-se que  $p$  neutralizadores são fixados ao longo de  $p$  coordenadas generalizadas  $q_{k_1}, q_{k_2}, \dots, q_{k_p}$ . Suas massas e amortecimentos equivalentes generalizados são  $m_{e_1}, m_{e_2}, \dots, m_{e_p}$  e  $c_{e_1}, c_{e_2}, \dots, c_{e_p}$ . A massa e o amortecimento do sistema composto, na equação (3.3.1), tem a seguinte forma:

$$\tilde{M} = M + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & m_{e_1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & m_{e_p} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

$$\tilde{C} = C + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & c_{e_1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & c_{e_p} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Note-se que a equação (3.3.1) só é válida no domínio da frequência, isto é, os parâmetros equivalentes generalizados são funções da frequência.

O conceito de espaço modal (vide equação 3.2.1.20) poderia ser aplicado para sistemas composto (sistema primário + neutralizadores) a partir dos autovetores do sistema primário, uma vez que a equação (3.3.1) é expressa em função das coordenadas generalizadas do sistema primário apenas. É importante notar, não obstante, que no espaço modal o sistema composto não ficará desacoplado, uma vez que esta transformação não diagonalizará parte da matriz  $\tilde{C}$ , composta por os parâmetros equivalentes generalizados. Importante também é notar que o modelo na equação (3.3.1) pode ter mil, dois mil ou mais graus de liberdade quando as matrizes são computadas, numericamente, por elementos finitos.

### 3.3.1 - Truncamento

Na prática, geralmente, apenas poucos modos são importantes na composição da vibração do sistema, aqueles que se encontram dentro de uma certa faixa de frequência de interesse. Portanto a solução de um problema de autovalores de ordem elevada consiste, apenas dos dez a vinte primeiros autovalores e autovetores.

Assume-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$Q(\Omega) = \hat{\Phi} \hat{P}(\Omega) \quad (3.3.1.1)$$

onde  $\hat{\Phi}$  é a matriz modal truncada do sistema primário de ordem  $n \times \hat{n}$ ,  $n$  representa o número de graus de liberdade e  $\hat{n}$  o número de autovetores atualmente computados ou medidos. Geralmente  $\hat{n} \ll n$ .

Substituindo a equação (3.3.1.1) na (3.3.1) e pré-multiplicando por  $\hat{\Phi}^T$  obtém-se:

$$\left[ -\Omega^2 \left[ \text{diag}(\hat{m}_j) + \hat{M}_A(\Omega) \right] + i\Omega \left[ \text{diag}(\hat{c}_j) + \hat{C}_A(\Omega) \right] + \text{diag}(\hat{k}_j) \right] \hat{P}(\Omega) = \hat{N}(\Omega) \quad (3.3.1.2)$$

Os elementos das matrizes  $\hat{M}_A(\Omega)$  e  $\hat{C}_A(\Omega)$  podem ser escritos como:

$$\hat{M}_{A(s,r)}(\Omega) = \sum_{i=1}^P m_{e_i} \Phi_{k_i s} \Phi_{k_i r} \quad (3.3.1.3)$$

$$\hat{C}_{A(s,r)}(\Omega) = \sum_{i=1}^P c_{e_i} \Phi_{k_i s} \Phi_{k_i r} \quad (3.3.1.4)$$

e

$$\hat{N}(\Omega) = \hat{\Phi}^T F(\Omega) \quad (3.3.1.5)$$

A expressão (3.3.1.2) representa um sistema de  $\hat{n} \ll n$  equações e pode ser resolvida, após calculadas as equações (3.1.7) e (3.1.8), correspondendo aos parâmetros equivalentes generalizados. A equação (3.3.1.2) mostra que no espaço modal o sistema de equações não é desacoplado. Isto é provocado ao introduzir, no sistema de equações da estrutura, os neutralizadores dinâmicos.

Fazendo a transformação inversa da equação (3.3.1.1), pode-se encontrar a solução das coordenadas físicas. Da equação (3.3.1.2) e (3.3.1.5) mostra-se que:

$$Q(\Omega) = \hat{\Phi} \hat{D}^{-1} \hat{\Phi}^T F(\Omega) \quad (3.3.1.6)$$

onde:

$$\hat{D} = \hat{D}_0 - \Omega^2 \hat{M}_A(\Omega) + i\Omega \hat{C}_A(\Omega) \quad (3.3.1.7)$$

e

$$\hat{D}_0 = \text{diag}(\hat{k}_j - \hat{m}_j \Omega^2 + i\Omega \hat{c}_j). \quad (3.3.1.8)$$

Pode observar-se que, a matriz  $\hat{D}_0$  é diagonal enquanto que a matriz  $\hat{D}$  que representa o sistema composto (estrutura + neutralizadores) não o é. Se os autovetores são ortonormalizados através da matriz de massa, a equação (3.3.1.8) toma a forma:

$$\hat{D}_0 = \text{diag}(\Omega_j^2 - \Omega^2 + i2\xi_j \Omega_j \Omega) \quad (3.3.1.9)$$

Da equação (3.3.1.6) e fazendo uma equivalência com sistemas de um grau de liberdade, a matriz de receptâncias do sistema composto é:

$$\alpha(\Omega) = \hat{\Phi} \hat{D}^{-1} \hat{\Phi}^T \quad (3.3.1.10)$$

Um elemento da matriz (3.3.1.10) pode ser escrito como:

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \sum_{i=1}^{\hat{n}} D_{ij} \Phi_{si} \Phi_{kj} \quad (3.3.1.11)$$

onde:

$D_{ij}$  são elementos da matriz  $\hat{D}^{-1}$  e  $\Phi_{sj}$  são os elementos da matriz  $\hat{\Phi}$ .

A matriz  $D^{-1}$  é a matriz resposta em frequência no espaço modal do sistema composto. Conhecendo-se os parâmetros modais do sistema primário e as características dos neutralizadores, pode ser calculá-la. É importante notar que no **espaço modal conta-se apenas com um número reduzido de equações** ( $\hat{n} \ll n$ ).

A partir da formulação simples e otimizada do sistema composto no espaço modal, pode-se seguir dois caminhos para controlar as vibrações do sistema primário:

- controle modo a modo. Esta técnica foi aplicada em Silva (1991). Nesta, despreza-se o acoplamento do sistema (3.3.1.2) e faz-se um controle modo a modo através de uma correlação direta com a teoria de Den Hartog (1956), para um grau de liberdade (técnica dos pontos fixos, capítulo II). Esta técnica foi consagrada e os resultados encontram-se em Espíndola e Silva (1992).
- Controle em uma faixa de frequência. Este procedimento mais realista (não despreza o acoplamento do sistema composto, equação (3.3.2.1)), baseia-se nas técnicas numéricas de otimização não linear para achar as características dos neutralizadores ótimos. Esta metodologia será desenvolvida neste trabalho.

### 3.3.2 - Tratamento Modo a Modo

Três parâmetros são necessários para caracterizar totalmente o neutralizador ótimo sendo um deles, a massa. Esta escolha é importante devendo guardar um certo equilíbrio no que diz respeito ao tamanho (comparado com o sistema primário) e eficiência.

Um método simples e consagrado (Espíndola e Silva, 1992) para fixar a massa dos neutralizadores é utilizar o conceito de relação de massas (Den Hartog, 1956), para sistemas de um grau de liberdade e extrapolá-los para sistemas de múltiplos graus de liberdade. Fazendo uma análise modo a modo, isto é, desprezando o acoplamento da equação (3.3.1.2) consegue-se, comparando com o sistema clássico de um grau de liberdade, encontrar uma relação de massa no espaço modal que permitirá calcular a massa do neutralizador para sistemas primários complexos. Este procedimento parte do pressuposto que os autovetores do sistema primário diagonalizam a matriz  $\tilde{M}$  e  $\tilde{C}$  o que, na realidade, não é totalmente verdade. Pode-se pensar que as matrizes resultantes no espaço modal são diagonalmente predominantes, para a maioria dos casos práticos. Ainda assim, esta forma de escolher a massa dos neutralizadores assegura uma boa performance, como será mostrado nos capítulos V e VI. Pode-se dizer, também, que esta forma assegura a participação modal para o cálculo da mesma, dando como resultado valores de massas menos conservadoras que as obtidas, considerando o sistema primário como de um grau de liberdade, tal como em Snowdon (1966) e Kitis (1983).

Considerando, então, o j-ésimo modo da equação (3.3.1.2), desprezando os termos fora da diagonal das matrizes  $\hat{M}_A(\Omega)$  e  $\hat{C}_A(\Omega)$ , têm-se:

$$\left[ -\Omega^2 \left( m_j + m_e(\Omega) \sum_{i=1}^p \Phi^2_{k_i j} \right) + i\Omega \left( c_j + c_e(\Omega) \sum_{i=1}^p \Phi^2_{k_i j} \right) + k_j \right] P_j(\Omega) = N_j(\Omega) , \quad (3.3.2.1)$$

com  $j = 1, \hat{n}$ .

Definindo,  $H_j(\Omega) = \frac{P_j(\Omega)}{(N_j(\Omega) / k_j)}$  obtém-se:

$$H_j(\Omega) = \frac{k_j}{(k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j) + \sum_{i=1}^p \Phi^2_{k_i j} (-\Omega^2 m_e(\Omega) + i\Omega c_e(\Omega))} \quad (3.3.2.2)$$

Se o sistema primário fosse de um grau de liberdade (com rigidez  $k$ , massa  $m$  e amortecimento  $c$ ) a expressão ficaria:

$$H(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{(F(\Omega) / k)} \quad (3.3.2.3)$$

ou

$$H(\Omega) = \frac{k}{(k - \Omega^2 m + i\Omega c) + (-\Omega^2 m_e(\Omega) + i\Omega c_e(\Omega))} \quad (3.3.2.4)$$

Para sistemas com um grau de liberdade, a relação de massas é  $\mu = m_a / m$ . Comparando as equações (3.3.2.2) e (3.3.2.4) percebe-se que a massa dos neutralizadores está sendo multiplicada pelo fator  $\sum_{i=1}^p \Phi^2_{k_i j}$ . Espíndola e Silva (1992), através de um controle modo a modo, propõem uma relação de massas modal para sistemas com múltiplos graus de liberdade:

$$\mu_j = \frac{\sum_{i=1}^p m_{a_i} \Phi^2_{k_i j}}{m_j} \quad (3.3.2.5)$$

Se os autovetores são ortonormalizados através da matriz de massa,  $m_j = 1$ .

Desenvolvendo a equação (3.3.2.5) têm-se:

$$\begin{aligned} \Phi^2_{k_1 1} m_{a_1} + \Phi^2_{k_2 1} m_{a_2} + \dots + \Phi_{k_p 1} m_{a_p} &= \mu_1 \\ \Phi^2_{k_1 2} m_{a_1} + \Phi^2_{k_2 2} m_{a_2} + \dots + \Phi_{k_p 2} m_{a_p} &= \mu_2 \\ \Phi^2_{k_1 3} m_{a_1} + \Phi^2_{k_2 3} m_{a_2} + \dots + \Phi_{k_p 3} m_{a_p} &= \mu_3 \\ \vdots & \\ \Phi^2_{k_1 \hat{n}} m_{a_1} + \Phi^2_{k_2 \hat{n}} m_{a_2} + \dots + \Phi_{k_p \hat{n}} m_{a_p} &= \mu_{\hat{n}} \end{aligned}$$

ou, em forma matricial:

$$\Phi^i_{\hat{n} \times p} M_{a \times p \times 1} = v_{\hat{n} \times 1} \quad (3.3.2.6)$$

sendo

$$M_a = [m_{a1}, m_{a2}, \dots, m_{ap}]^T$$

$$v = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\hat{n}}]^T$$

$$\Phi^i = \begin{bmatrix} \Phi_{k_1 1} & \dots & \Phi_{k_p 1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi_{k_1 \hat{n}} & \dots & \Phi_{k_p \hat{n}} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações acima encontram-se as massas ótimas dos neutralizadores. Isto pode ser feito, por exemplo, através da solução de norma mínima achando a pseudo - inversa da matriz  $[\Phi^i]_{\hat{n} \times p}$  e pré-multiplicando esta pelo vetor de relação modal  $v$ .

No caso particular, considerando as massas dos neutralizadores iguais

$$\mu_j = \frac{m_a \sum_{i=1}^p \Phi^2_{k_i j}}{m_j} \quad (3.3.2.7)$$

sendo que, para autovetores ortonormais  $m_j = 1$ . A massa dos neutralizadores pode ser isolada da forma:

$$m_a = \frac{\mu_j}{\sum_{i=1}^p \Phi^2_{k_i j}} \quad (3.3.2.8)$$

Assim,  $m_a$  representa a massa dos neutralizadores para cada modo dentro da faixa de frequência de interesse. Após isto, toma-se uma média aritmética das  $\hat{n}$  massas da forma:

$$m_a = \frac{\sum_{i=1}^{\hat{n}} m_{a_i}}{\hat{n}} \quad (3.3.2.9)$$

Isto põe a teoria do controle modo a modo em paralelo com Den Hartog (1956), para sistemas primários com um grau de liberdade. Ainda sobre esta teoria, foram propostos os seguintes valores para  $\mu_j$ :

$$\mu_j = 0.1 \text{ a } 0.25 \quad (3.3.2.10)$$

Fixada a massa (3.3.2.9), restam ainda dois parâmetros para definir totalmente os neutralizadores: frequência natural e amortecimento ou rigidez e amortecimento.

Os passos necessários para o cálculo dos mesmos serão apresentados no capítulo V.

# **CAPÍTULO IV**

## **TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR**

## CAPÍTULO IV: TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR

Uma vez que o modelo matemático do sistema composto (sistema primário + neutralizador) esteja delineado (capítulo III), métodos numéricos de otimização não linear devem ser utilizados para encontrar os parâmetros ótimos dos neutralizadores dinâmicos.

Neste capítulo apresenta-se a filosofia de trabalho de alguns destes métodos com suas vantagens e desvantagens. Para isto, introduz-se o problema de otimização não linear com restrições, envolvendo conceitos de função objetivo, restrições de igualdade e desigualdade.

Devido à existência de uma grande variedade de técnicas de otimização, que resolvem o problema não linear sem restrições, passar do problema com restrições a um sem restrições é uma tarefa necessária a ser realizada. Para isto, o método de funções ponderadas e o método de barreiras serão apresentados.

Algumas técnicas de otimização não linear sem restrições no espaço  $nd$  dimensional, com e sem informação de derivada, são introduzidas e discutidas.

Uma explicação rápida sobre otimização unidirecional será abordada no final deste capítulo.

### 4.1 - Problema de Otimização Não Linear com Restrições

O problema de otimização não linear é achar o ponto ótimo (máximo ou mínimo) de uma função no espaço  $R^{nd}$ , ou  $nd$  dimensional, sujeita a certas restrições. De forma geral pode ser apresentado como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar } f(x) & \text{onde } f: R^{nd} \rightarrow R \\ & \text{com } x \in R^{nd} \\ \text{sujeita a:} & \\ h_i(x) = 0 & i = 1, 2, \dots, m_i \\ g_j(x) \geq 0 & j = m_i + 1, m_i + 2, \dots, l \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

A função  $f(x)$  é conhecida como função objetivo,  $h_i(x)$  e  $g_j(x)$  como a  $i$ -ésima e  $j$ -ésima restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Ao conjunto de pontos  $x$  na interseção das restrições de igualdade e desigualdade, dá-se o nome de região viável.

Existe uma grande quantidade de técnicas para resolver o problema (4.1.1) sem restrições. Isto é, encontrar o ponto ótimo da função  $f(x)$ , no espaço  $nd$  dimensional. O objetivo principal da maioria destes métodos é achar uma direção de busca, a partir de um ponto de partida arbitrário. Uma vez que a direção de busca é estabelecida, técnicas uni - direcionais podem ser aplicadas. Assim, como para o caso de otimização não linear sem restrições em  $R^{nd}$ , a procura do ponto ótimo unidirecional conta com um número grande de técnicas numéricas. Ambos processos são iterativos.

Entre uma busca unidirecional e a seguinte, uma atualização do ponto deve ser feita. Desta forma, na iteração  $k + 1$ , têm-se:



$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$$

sendo

$$\Delta x^k = \lambda_k d^k.$$

(4.1.2)

O vetor  $d^k$  é a direção de busca na iteração  $k$  e  $\lambda_k$  é um escalar que determina a distância entre o ponto  $x^k$  e o ponto ótimo da função objetivo sobre a direção  $d^k$ .

Pode-se sintetizar o funcionamento destas técnicas nos seguintes passos:

- 1 - escolhe-se um ponto de partida arbitrário e um critério de convergência;
- 2 - determina-se, através de alguma técnica numérica, a direção de busca;
- 3 - determina-se o ponto ótimo da função objetivo nessa direção;
- 4 - atualiza-se o ponto com a equação (4.1.2) e se repetem os passos 2, 3 e 4 até que o critério de convergência estabelecido em 1 seja satisfeito.

Uma condição necessária para determinar se o ponto  $x^*$  é um ponto ótimo, para o problema de otimização não linear com restrições, é conhecida como Kuhn - Tucker (Arora, 1989). No caso do problema sem restrições esta condição é conseguida se o vetor gradiente tem todas suas componentes nulas.

$$\nabla f(x)|_{x^*} = 0$$

(4.1.3)

Este conceito poderia ser considerado como um critério de convergência, isto é, se achado um ponto que satisfaça a expressão (4.1.3) o programa pode parar. A expressão (4.1.3) não garante que o ponto encontrado seja um mínimo, no caso de se estar minimizando, uma vez que só foi satisfeita a condição necessária. O ponto pode ser um mínimo, máximo ou um ponto de inflexão (em  $R^{nd}$ , conhecido como sela).

A condição suficiente é conseguida através da informação da segunda derivada da função, no ponto ótimo em  $R^2$  e, no espaço  $nd$  dimensional, pela matriz Hessiana. A matriz Hessiana é definida como:

$$H(x) = \left[ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

(4.1.4)

Dependendo das características desta, a condição suficiente toma a forma (Bazaraa, 1979, Arora, 1989):

- se  $H(x)|_{x^*}$  é uma matriz positiva semi-definida ou positiva definida, o ponto  $x^*$  é um ponto mínimo. No caso de ser positiva definida, o mínimo é único.
- se  $H(x)|_{x^*}$  é negativa semi-definida ou negativa definida, o ponto é um máximo, valendo o mesmo comentário anterior se for negativa definida.
- se  $H(x)|_{x^*}$  não se corresponde com nenhuma das definições anteriores, o ponto é um ponto de sela (inflexão em  $R^2$ ).

A maioria dos algoritmos, comerciais ou encontrados na literatura, não faz a verificação da condição suficiente, ficando esta tarefa para o usuário. Isto é importante na hora de classificar o

ponto ótimo como mínimo ou máximo e como uma comparação dos distintos algoritmos disponíveis na literatura (Arora, 1989).

## 4.2 - Transformação de um Problema com Restrições para um Equivalente sem Restrições

Como explicado anteriormente no item 4.1, muitas técnicas de otimização não linear em  $R^n$  resolvem o problema sem restrições. Uma técnica que leva o problema com restrições a um equivalente sem restrições é conhecida como método das penalidades. Esta consiste de uma transformação da forma:

$$fobj(x, r) = f(x) + P(h(x), g(x), r) \quad (4.2.1)$$

sendo  $f(x)$  a função objetivo do problema original (com restrições),

$P(h(x), g(x), r)$  é a função penalidade e  $r$  o parâmetro que controla esta.  $P$  depende do método utilizado. A idéia básica é:

- escolher um vetor de projeto inicial  $x_0$ ,
- dotar uma metodologia para o cálculo da função  $fobj(x, r)$ ,
- um parâmetro inicial  $r$ ,
- achar o ponto ótimo  $x^*$  para o parâmetro  $r$  escolhido,
- ajustar o parâmetro que controla a penalidade e repetir o processo até que nenhuma melhora seja possível.

Existem dois tipos básicos de funções penalidades:

- Métodos das Penalidades.
- Métodos de Barreiras.

### 4.2.1 - Métodos das Penalidades

A idéia básica é definir uma função  $P$ , de forma que quando as restrições sejam violadas, uma elevada componente seja adicionada à função objetivo do problema original, dependendo do tamanho desta violação. Na procura do mínimo isto provocará, em forma quase imediata, uma mudança do ponto para algum outro que se encontre dentro da região viável. Uma função penalidade muito utilizada é conhecida como função de perda quadrática. Esta função tem a forma:

$$P(h(x), g(x), r) = r \left\{ \sum_{i=1}^{m_1} [h_i(x)]^2 + \sum_{j=m_1+1}^l [g_j^-(x)]^2 \right\} \quad (4.2.1.1)$$

onde  $g_j^-(x) = \min(0, g_j(x))$ . Isto significa que quando a restrição é violada ( $g_j(x) < 0$ ) a função objetivo do problema original é penalizada. Por outro lado se a restrição não é violada ( $g_j(x) \geq 0$ ),  $g_j^-(x) = 0$ . Neste caso, se não existem restrições de igualdades, a função objetivo do problema transformado é igual a do problema original.

O método que trabalha com este tipo de penalidades, nas restrições de desigualdade, recebe o nome de penalização externa. O ponto de partida pode pertencer ou não à região viável.

#### 4.2.2 - Método das Barreiras

São aplicados somente a problemas de otimização não linear com restrições de desigualdade. Os métodos mais populares são:

$$P(g(x), r) = 1/r \sum_{i=1}^l [1/g_i(x)]$$

$$P(g(x), r) = -1/r \sum_{i=1}^l [\log(g_i(x))]$$
(4.2.2.1)

Estas penalidades são chamadas de barreiras uma vez que grandes barreiras são construídas ao redor da região viável. De fato a função  $P$  tende para infinito quando qualquer desigualdade tente transformar-se em ativa. Demonstra-se, tanto para o método das penalidades quanto para o das barreiras que quando  $r \rightarrow \infty$ ,  $x(r) \rightarrow x^*$ . Aqui  $x(r)$  representa o ponto ótimo da função ampliada  $fobj(x, r)$  e  $x^*$  é a solução do problema original.

#### 4.2.3 - Vantagens e Desvantagens do Método das Penalidades e Barreiras

##### Função Penalidade

- É aplicável a problemas de otimização não linear submetido a restrições de todo tipo (geral).
- O ponto de partida  $x_0$  pode ser arbitrário.
- O método interage com a região viável e não viável. Nesta última, a função do problema pode não estar definida.
- Se o processo iterativo termina prematuramente o ponto de busca pode não pertencer à região viável e portanto não pode ser utilizado como solução possível.

##### Métodos das Barreiras

- Este método é aplicável para problemas com restrições de desigualdade somente.
- O ponto de partida deve ser viável.
- O método sempre interage na região viável assim, se este termina em forma prematura, o ponto de saída é viável e pode ser utilizado como ponto ótimo se preciso.

#### 4.2.4 - Casos Particulares

Existem alguns casos particulares onde as restrições de desigualdade só permitem tomar valores dentro de uma certa faixa para cada componente do ponto  $x$ . Assim:

$$x_j^L \leq x_j \leq x_j^H \text{ com } j = 1 \text{ a } nd, \quad (4.2.4.1)$$

sendo  $x_j^L$  e  $x_j^H$  constantes que dependem do tipo do problema. Um caso muito comum é quando a variável representa algum parâmetro físico, como massa ou volume, não podendo tomar valores negativos nem infinitos, ou maiores que um certo valor preestabelecido. Nestes casos os parâmetros das restrições  $m_i$  e  $l$  tomam os seguintes valores:

$$m_i = 0,$$

$$l = 2 \text{ nd}.$$

Para este tipo de problemas, o método das penalidades externas propõe uma função formada pela função objetivo do problema original se o ponto pertence à região viável; a função objetivo anterior somada às restrições ponderadas quando o ponto não pertence à região viável. Partindo do problema original (4.1.1) tem-se:

- se  $x \notin S^*$ , a função que está sendo minimizada deve ser penalizada, de tal forma que o ponto retorne à região viável novamente. Se as restrições são da forma (4.2.4.1), cada componente da variável  $x$  terá duas restrições associadas ( $g_j(x) \geq 0$ , com  $j = 1 \text{ a } 2nd$ ). Para a  $i$ -ésima componente de  $x$ :

$$\begin{cases} x_i - x_i^L \geq 0 \\ -x_i + x_i^H \geq 0. \end{cases}, \text{ com, } i = 1 \text{ a } nd$$

ou

$$\begin{cases} g_j = x_i - x_i^L \\ g_{j+1} = -x_i + x_i^H \end{cases}, \text{ com } j = 1 \text{ a } 2nd. \quad (4.2.4.2)$$

A função objetivo do problema sem restrições correspondente pode ser equacionada como:

$$fobj(x) = f(x) + \frac{1}{R_K} \sum_{j=1}^{2nd} [g_j(x)]^{n_1} \quad (4.2.4.3)$$

sendo  $R_K \ll 1$  ( $R_K > 0$ ) e  $n_1$  o expoente da função penalidade (anteriormente foi apresentado este coeficiente como sendo igual a 2). Na figura 4.1 pode-se observar o significado físico das penalizações externas fazendo que o ponto permaneça dentro da região viável, uma vez que fora da mesma a função cresce exponencialmente, dependendo da escolha de  $R_K$  e  $n_1$ .

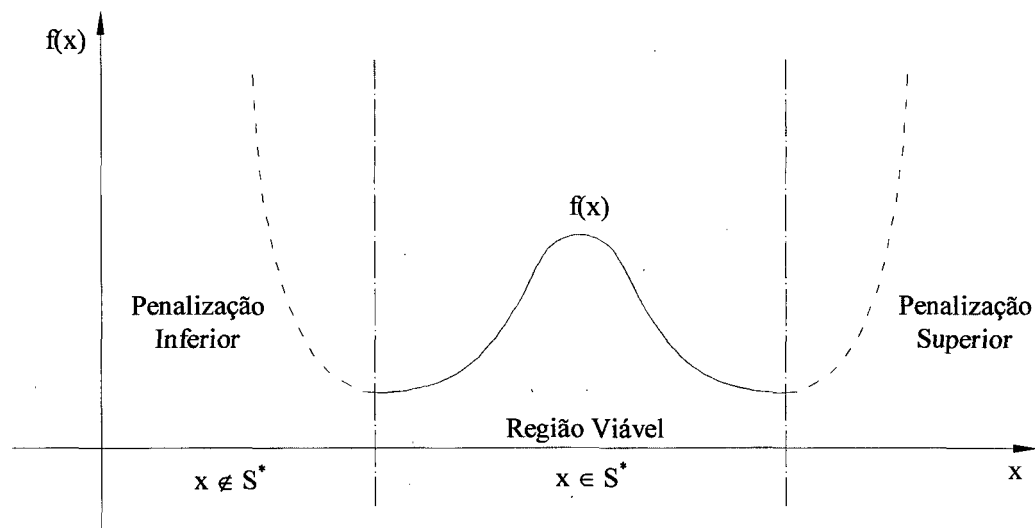


FIGURA 4.1 - Método das Penalização externa

- se  $x \in S^*$ :

$$fobj(x) = f(x) \quad (4.2.4.4)$$

Se o ponto  $x \in S$ , em todo momento, a função objetivo do problema sem restrições é a função objetivo do problema original. Neste caso o parâmetro  $r$  não ser modificado e o processo de otimização é realizado uma única vez, diminuindo o tempo computacional de forma considerável. O presente trabalho contém apenas restrições de desigualdade como mostradas neste item (4.2.4) e a função do problema sem restrições será construída através das expressões (4.2.4.3) e (4.2.4.4).

### 4.3 - Direção de Busca de um Problema de Otimização Não Linear

Como explicado anteriormente (expressão 4.1.2) a atualização do ponto  $x \in R^{nd}$ , na interação  $k+1$ , depende da direção de busca preestabelecida de alguma forma. A escolha desta ( $d$ ), na interação  $k$ , é fundamental e dependerá da técnica de otimização não linear escolhida para tal fim. Existem diversos métodos que determinam esta direção. Uma condição geral para diferenciá-los é:

- métodos que utilizam informação da derivada.
- métodos que não utilizam informação da derivada.

#### 4.3.1 - Métodos que Não Utilizam Informação da Derivada.

Alguns deles são:

- método da direção aleatória;

- método de Powell;
- método cíclico (variante de Powell);
- método de Hooke e Jeeves;
- método do poliedro rígido;
- método do poliedro flexível.

Os métodos utilizados nesta tese foram o método cíclico e o método do poliedro flexível.

### Método Cíclico

As direções de busca do método cíclico são os eixos básicos do espaço  $R^{nd}$ . O  $i$ -ésimo eixo será:

$$e_i = [0 \dots 1 \dots 0 \ 0]^T.$$

$\uparrow i\text{-ésimo}$

A filosofia do método é procurar o ponto ótimo unidirecional sobre todos os eixos básicos, ciclicamente, até que um certo critério de convergência seja satisfeito. No esquema abaixo pode-se visualizar isto.

$$\begin{array}{l} e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n \ \rightarrow \\ \rightarrow e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n \ \rightarrow \\ \rightarrow e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n \ \rightarrow \ \dots \end{array}$$

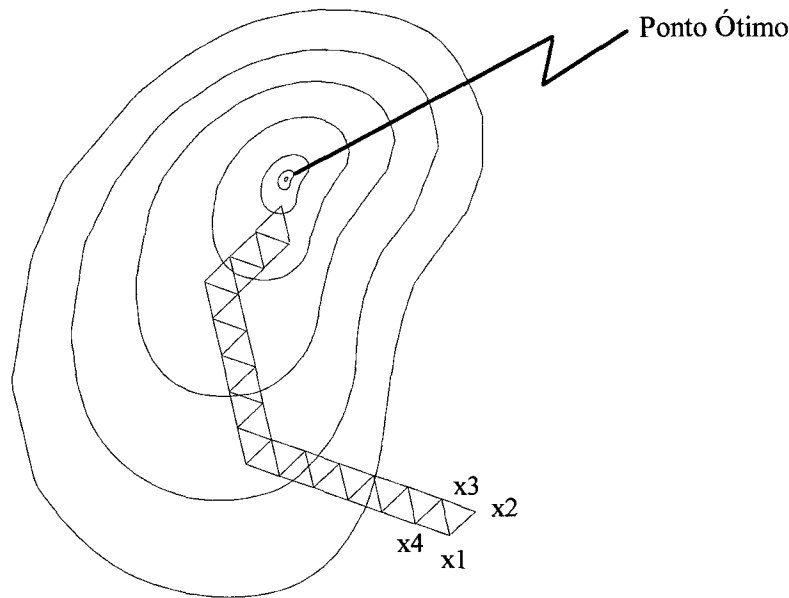
As otimizações, em cada uma das direções básicas, são efetivadas através de qualquer método de busca unidirecional, amplamente encontrados na literatura e que serão enunciados oportunamente neste capítulo.

Entre um ciclo e o seguinte, geralmente é realizada uma busca sobre uma direção diferente daquela dos eixos básicos. Isto é feito para contornar algum vício que possa aparecer, seguindo direções padrões com os eixos básicos (direções ortogonais). Este fenômeno é denominado quebra de condicionamento e a direção pode ser extraída da diferença entre dois vetores ótimos de diferentes eixos básicos (geralmente do primeiro e último).

### Poliedro ou Simplex

A idéia básica é mostrada na figura 4.2. Representando a função objetivo através de suas curvas de níveis, um poliedro de  $nd + 1$  vértices é construído para  $x \in R^{nd}$ .

Na procura do mínimo, encontra-se o valor da função para cada vértice e abandona-se aquele que possui o maior valor, girando o poliedro sobre seu centro de gravidade. Desta forma, um novo poliedro é formado e o passo anterior é repetido até que um certo critério de convergência seja satisfeito.

FIGURA 4.2 - Método do poliedro rígido em  $R^{nd}$ .

A escolha do tamanho do poliedro é muito importante. Se este é grande, rapidamente se chegará ao ponto ótimo mais próximo, mas a sua convergência não será boa uma vez que ficará pulando ao redor deste. Se o tamanho escolhido é muito pequeno, chegar até o ponto ótimo mais perto consumirá um tempo elevado, mas a convergência será melhorada junto com a precisão do cálculo do ponto ótimo. Para acelerar o processo de otimização e evitar os problemas antes mencionados, um poliedro flexível foi elaborado por Nelder and Mead (Himmelblau, 1972, Bazaraa, 1979).

Os métodos que não usam informação da derivada são simples e muito usados quando a função objetivo não é derivável. São métodos rápidos de programar, dando excelentes resultados. Sua desvantagem é a lentidão, quando comparados com métodos que utilizam informação da derivada. Em particular o método do poliedro depende muito do ponto inicial, uma vez que ele para no primeiro ponto ótimo local que acha.

#### 4.3.2 - Métodos que Utilizam Informação da Derivada

Alguns deles são:

- direção do gradiente (Steepest Descent);
- direção conjugada;
- método de Newton;
- método de Quase-Newton.

##### Método “Steepest Descent”

O gradiente de uma função escalar foi definido na equação (4.1.3). Existem várias propriedades que este vetor possui. Estas, aqui apresentadas mas não demonstradas (Arora, 1989) são:

- 1- o  $\nabla f$  de uma função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no ponto  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  é ortogonal (normal) ao

plano tangente à superfície  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no ponto  $x^*$ .

- 2 - Representa a direção de máxima taxa de crescimento da função  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para o ponto  $x^*$ .
- 3 - A máxima taxa de crescimento de  $f(x)$  para qualquer ponto  $x^*$  é a magnitude do vetor gradiente.

Segundo estas propriedades, este vetor pode ser usado para definir a direção de busca de um problema de otimização não linear. A direção de busca, em um problema de mínimo será escolhido como:

$$d = -\nabla f(x) \quad (4.3.2.1)$$

Definido  $d$ , aplica-se qualquer técnica de otimização unidirecional. Encontrado o ponto ótimo nesta direção, atualiza-se o mesmo através da equação (4.1.2). Na continuação, um novo vetor gradiente é calculado e um novo vetor  $d$ , determinado. Os cálculos são repetidos até que um certo critério de convergência seja satisfeito.

### Método de Newton

No método “Steepest Descent” apenas a informação da primeira derivada de  $f(x)$  foi usada para determinar  $d$ . Se a informação da segunda derivada é disponível pode-se, através da expansão em Série de Taylor, representar a função objetivo no ponto  $x^*$  através de uma função quadrática. Desta forma, uma direção de busca mais efetiva que a do gradiente pode ser encontrada. A idéia básica do método de Newton é achar, de um passo só, o mínimo da função quadrática ajustada no ponto  $x^*$ . Ajustando uma quadrática, através da Série de Taylor, no ponto  $x$  tem-se:

$$q(x + \Delta x) \cong f(x) + \nabla f^t \Delta x + 0.5 \Delta x^t \cdot H \cdot \Delta x \quad (4.3.2.2)$$

sendo,

$\Delta x$  uma pequena mudança em  $x$ ,

$H$  a matriz Hessiana no ponto  $x$ , equação (4.1.4).

A condição necessária para o ponto ótimo, na quadrática  $q$ , é:

$$\frac{\partial q}{\partial (\Delta x)} = 0. \quad (4.3.2.3)$$

De (4.3.2.3) e (4.3.2.2) obtém-se:

$$\Delta x = -H^{-1} \nabla f. \quad (4.3.2.4)$$

Como definido em (4.1.2), o ponto ótimo da  $k+1$ -ésima quadrática, ajustada pela Série de Taylor na função objetivo, será:



$$x_q^{k+1} = x_q^k + \Delta x^k \quad (4.3.2.5)$$

Note-se que o ponto ótimo é um ótimo da função quadrática (ajustada na função objetivo) e não da função objetivo.

Uma vez atualizado o ponto através de (4.3.2.5) ajusta-se, sobre este, uma nova quadrática e assim sucessivamente. Uma vez que um certo critério de convergência seja satisfeito, o mínimo da quadrática passa a ser o mínimo da função objetivo.

Por outro lado, seguindo a filosofia dos métodos anteriores, a direção de busca pode ser definida como:

$$d = -H^{-1} \nabla f \quad (4.3.2.6)$$

e, a partir daqui, buscas unidirecionais podem ser realizadas. Isto geralmente acelera o processo de convergência quando comparado com o ajuste através de quadráticas. O gráfico 4.3 mostra as direções de busca obtidas através dos métodos de Newton e do gradiente, sobre as curvas de níveis de uma função quadrática qualquer em  $R^2$ .

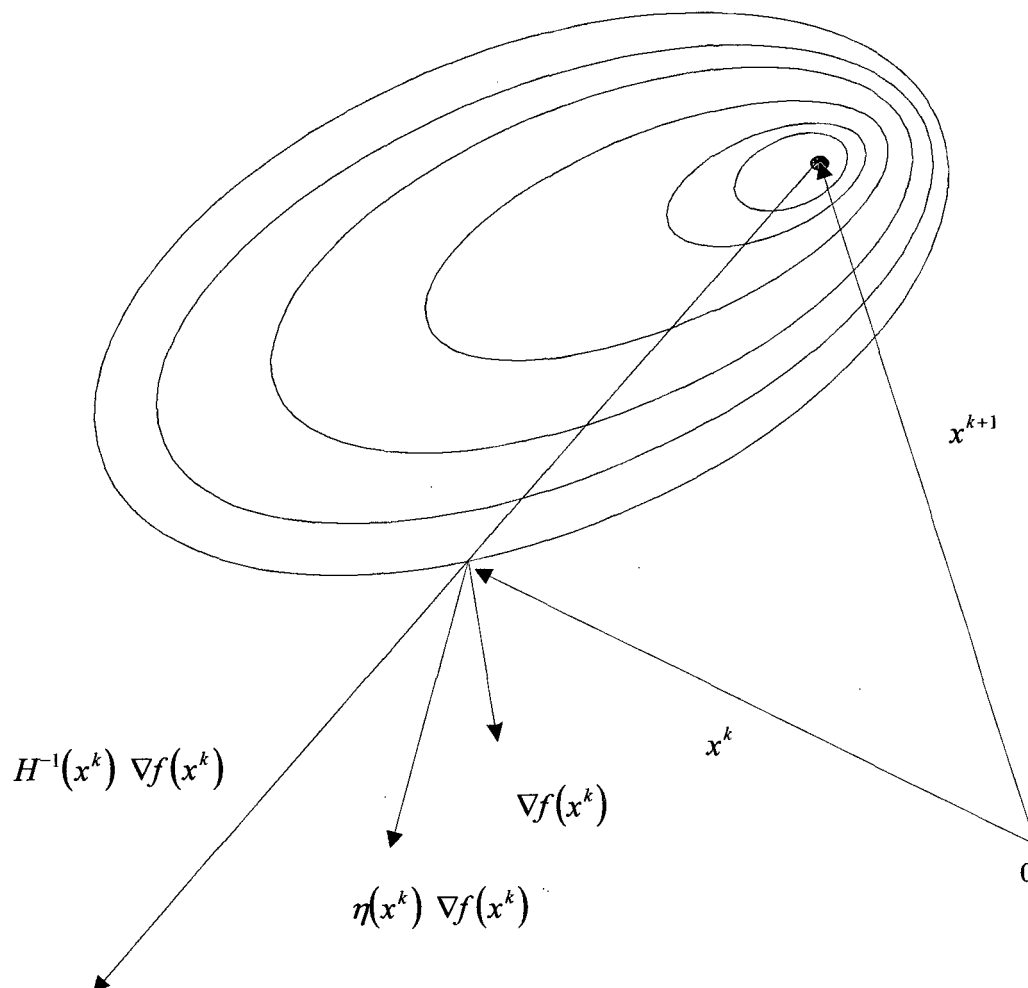


FIGURA 4.3 - Comparação entre o método de Newton e o método “Steepest Descent”.

Pode-se perceber do exposto neste item que, ao aplicar sobre a quadrática o método do gradiente, várias iterações serão necessárias para chegar ao ponto ótimo. No método de Newton, isto é conseguido de uma vez só.

Sendo assim, a direção  $d$ , obtida pelo método de Newton é a melhor direção de busca, uma vez que usa a informação da segunda derivada. Porém seu uso é limitado, na prática, a problemas onde a função objetivo é bem comportada (variações suaves, funções convexas / côncavas e apenas um ponto extremo na região viável). Ainda, o cálculo de  $H^{-1}$  na maioria dos métodos numéricos é evitado.

### Método de Quase-Newton

Foi apresentado, brevemente, o método “Steepest Descent”. Observou-se que possui uma taxa de convergência relativamente baixa quando comparada com o método de Newton uma vez que trabalha apenas com a informação da primeira derivada.

O método de Newton, contendo uma taxa de convergência excelente, não é muito utilizado na prática.

Pelas razões aqui mencionadas, Davidon e posteriormente Fletcher e Powell (Bazaraa, 1979, Arora, 1989) propõem o método denominado DFP, para obter a direção de busca  $d$ . Esta direção encontra-se entre a direção de Newton e a direção do gradiente, não precisando da informação da segunda derivada de  $f(x)$ . Assim sendo, a direção de busca do método Quase-Newton é dado por:

$$d = -\eta(x) \cdot \nabla f(x)$$

Se:

$$\eta(x) = I \quad \Rightarrow \quad \text{“Steepest Descent”}$$

$$I < \eta(x) < H^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{“Quase-Newton”}$$

$$\eta(x) = H^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{“Newton”}$$

A construção da matriz  $\eta(x)$  é dada por:

$$\eta(x^{k+1}) = \eta(x^k) + \Delta\eta(x^k)$$

$$\Delta\eta(x^k) = \frac{1}{w} \cdot \frac{\Delta x \cdot y^t}{y^t \cdot \Delta g(x^k)} - \frac{\eta(x^k) \cdot \nabla g(x) \cdot z^t}{z^t \cdot \Delta g(x^k)},$$

onde

$$\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$$

$$\Delta g(x^k) = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$$

No método DFP:

$$w = 1$$

$$y = \Delta x$$

$$z = \eta(x^k) \cdot \Delta g(x^k)$$

Importante notar que o método Quase-Newton começa sua procura, geralmente, na direção do gradiente e no decorrer do processo de otimização encontra-se entre a direção do gradiente e a direção de Newton. Este método fornece excelentes resultados tanto no que diz respeito ao tempo computacional gasto quanto na sua convergência e, por tais motivos, utilizado nesta tese. Na figura 4.3 pode-se visualizar esta direção de busca.

#### 4.4 - Busca Unidirecional

Uma vez que a direção  $d$  foi estabelecida através de alguma das técnicas antes mencionadas, uma busca unidirecional deve ser feita.

Partindo do ponto  $x^k$  e da direção  $d^k$ , uma reta em  $R^{nd}$  pode ser definida como:

$$x = x^k + \lambda d^k. \quad (4.4.1)$$

Encontrar o ponto ótimo da função  $f: R^{nd} \rightarrow R$ , sobre a reta (4.4.1), significa achar o valor ótimo da função em forma unidirecional. A variação da função sobre a reta  $x$  será:

$$f(x) = f(x^k + \lambda d^k). \quad (4.4.2)$$

Graficamente:

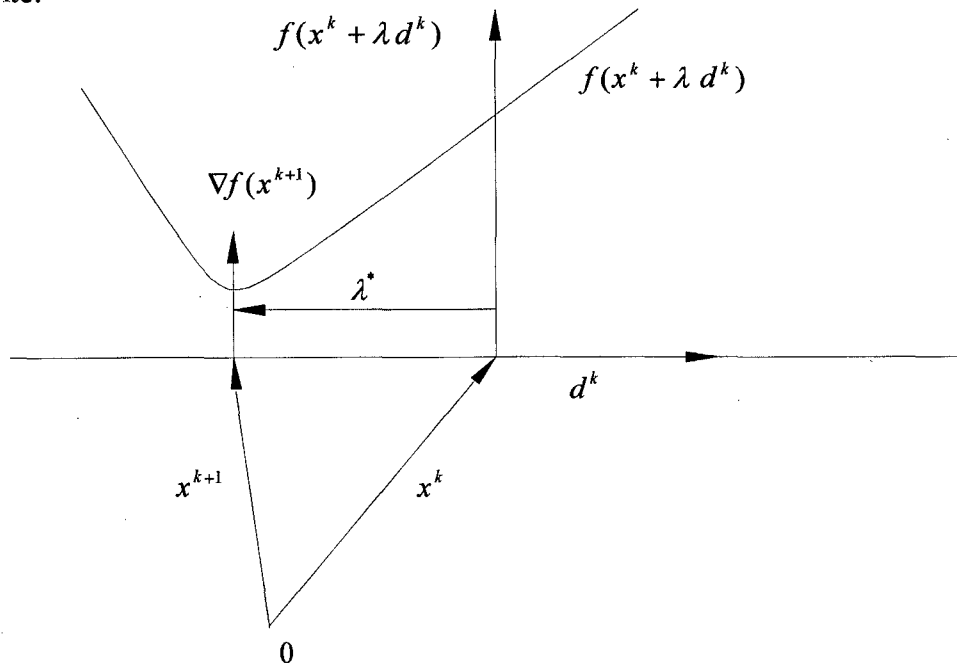


FIGURA 4.4 - Busca unidirecional

O parâmetro  $\lambda^*$  é o escalar que define o ponto ótimo a partir de  $x^k$ , na direção  $d^k$ . Uma vez que este parâmetro tenha sido encontrado, o ponto deve ser atualizado através da equação (4.1.2). Existem vários métodos que realizam a procura unidirecional. Da mesma forma que para  $R^{nd}$ , podem ser divididos em:

- métodos que não utilizam informação da derivada;
- métodos que utilizam informação da derivada.

Apresentam-se aqui alguns deles, mencionando aqueles que foram usados neste trabalho.

#### 4.4.1 - Métodos que Não Utilizam Informação da Derivada

- método da seção áurea;
- método da bisseção ou Balzano;
- método da dicotomia;
- método de Fibonacci;
- método de Powell.

#### 4.4.2 - Métodos que Utilizam Informação de Derivada

- método de Newton.

Estes métodos e outros encontram-se em uma vasta bibliografia de técnicas de otimização não linear. São simples de programar e dão excelentes resultados.

As vantagens e desvantagens destes correspondem àquelas vistas para  $R^{nd}$ .

Neste trabalho foram utilizadas técnicas que não usam informação de derivada devido ao caráter das funções objetivos que foram propostas. Estas serão apresentadas no capítulo V.

# **CAPÍTULO V**

**FUNÇÃO OBJETIVO, VARIÁVEL DE  
PROJETO – SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

## CAPÍTULO V: FUNÇÃO OBJETIVO, VARIÁVEL DE PROJETO - SIMULAÇÃO NUMÉRICA

No capítulo III foi introduzida uma teoria generalizada com respeito ao estudo de neutralizadores dinâmicos fixados em uma estrutura primária qualquer. O conhecimento dos parâmetros modais da estrutura primária, na faixa de frequência de interesse, permite realizar uma transformação do sistema composto, do espaço físico para o espaço modal reduzindo, de forma considerável, a dimensão do problema. A resolução deste problema é realizada através do uso de técnicas de otimização não linear, cujos conceitos básicos foram vertidos no capítulo IV.

Kitis (1983), foi o primeiro a utilizar técnicas de otimização não linear para encontrar as características ótimas de neutralizadores, estudando um caso particular de uma viga engastada - livre. Dois neutralizadores foram fixados (no extremo livre e no meio) para reduzir a resposta da viga. Trabalhando no espaço físico, consegue formular o problema de otimização da forma mais reduzida possível através de passos algébricos adequados. Isto permitiu, neste caso particular, uma otimização do tempo computacional consumido no processo na procura dos parâmetros ótimos dos neutralizadores. Para qualquer outro caso (sistemas primários geometricamente complexos), a formulação apresentada por Kitis (1983), levará a um sistema de  $n + p$  equações para a estrutura composta. É prudente lembrar que, se o modelo do sistema primário for obtido através de técnicas de elementos finitos,  $n$  pode tomar valores elevados (1000 ou maior) e  $p$  dependerá do número de neutralizadores para o controle. Assim, esta técnica em forma geral, torna o problema de controle de vibrações em banda larga extremamente penoso do ponto de vista do tempo computacional.

A proposta desta tese é, além de uma metodologia geral ao problema de controle de vibrações e ruído, implementar uma técnica que trabalhe em todo momento com um reduzido número de equações. Para isto é necessário ter um mínimo conhecimento da teoria modal de sistemas com múltiplos graus de liberdade.

Neste capítulo serão apresentadas algumas funções objetivos (vantagens e desvantagens) e restrições de desigualdade. Introduz-se a variável de projeto, tanto para neutralizadores viscosos quanto viscoelásticos Tipo II.

Uma simulação numérica de redução de vibrações sobre uma viga engastada livre será introduzida para ambos tipos de neutralizadores, para simples comparação. Esta simulação têm a finalidade de aplicar os conceitos vertidos nos capítulos III, IV e parte do V, como também, aplicar a metodologia aqui proposta sobre um caso extremo, quando, na banda de frequência analisada, exista um modo de vibração apenas. Mostrar-se-á, assim, a equivalência entre esta metodologia geral com a técnica desenvolvida por Den Hartog (1956) para um grau de liberdade tanto em banda estreita quanto em banda larga. Posteriormente no capítulo VI será mostrado o verdadeiro potencial deste método em um exemplo teórico-prático (placa de aço). Neste capítulo, vários modos serão controlados simultaneamente.

Uma consideração sobre a influência do amortecimento do sistema primário na redução da resposta através da fixação de neutralizadores ótimos, será realizada. Mostra-se que grandes reduções das respostas em frequência, produto de considerar um baixo amortecimento na estrutura, nem sempre representam o que acontece na realidade e, às vezes, até pode induzir a um controle não tão eficiente como o esperado.

## 5.1 - Variável de Projeto

A variável de projeto é a variável independente da função objetivo no problema de otimização não linear, apresentado no capítulo IV. No presente problema, esta deve representar as características dos neutralizadores dinâmicos, considerando que a massa dos mesmos foi fixada no capítulo III (expressão (3.3.2.8), para massas dos neutralizadores iguais).

Existem várias alternativas para definir esta variável. A primeira grande divisão é o tipo de modelo utilizado para o neutralizador.

### 5.1.1 - Neutralizador Tipo Viscoso

Este modelo é apresentado para corroboração dos conceitos teóricos mostrados até aqui e também como comparação com o modelo viscoelástico que será usado como modelo final. Este último é de mais fácil construção prática.

Uma primeira escolha foi utilizar a rigidez e o amortecimento na forma:

$$x^T = (K_{a_1}, \dots, K_{a_p}, c_{a_1}, \dots, c_{a_p}). \quad (5.1.1.1)$$

Várias dificuldades foram encontrados ao utilizar este tipo de variável no processo de otimização. Entre elas podem-se citar:

- a rigidez e o amortecimento são numericamente muito diferentes. Geralmente, devido à filosofia das técnicas de otimização não linear sem o uso da informação de derivada, a busca do ponto ótimo é feita através de passos (“steeps”) constantes sobre uma direção de busca (no caso do método cíclico, as direções de busca são as direções dos eixos básicos). Se as componentes da variável  $x$  são muito diferentes numericamente, pequenos passos em uma direção significarão grandes passos na outra, o que provocará uma convergência ineficiente.
- Outra desvantagem foi a sensibilidade, por parte do usuário do algoritmo, em definir um adequado ponto de partida  $x_0$ . Não existe uma forma direta de visualizar que valores de rigidez ou amortecimento são mais adequados para serem introduzidos como ponto inicial, podendo-se escolher um ponto de partida muito longe do valor ótimo. Isto pode não prejudicar o processo de otimização, mas o tornará excessivamente lento.

Outra variável, que melhora a “performance” do processo como um todo é aquela formada pela frequência de ressonância dos neutralizadores e o amortecimento, ou frequência de ressonância e a razão de amortecimento. Assim, a variável toma a forma:

$$x^T = (\Omega_{a_1}, \dots, \Omega_{a_p}, c_{a_1}, \dots, c_{a_p}) \quad (5.1.1.2)$$

$$x^T = (\Omega_{a_1}, \dots, \Omega_{a_p}, C_1 \xi_{a_1}, \dots, C_1 \xi_{a_p}) \quad (5.1.1.3)$$

sendo  $C_1$ , um fator constante que eleva as componentes da variável à mesma ordem de grandeza das frequências naturais. Este valor pode ser definido como o valor médio da faixa de frequência de interesse  $C_1 = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$ , sendo  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  as frequências inferior e superior desta faixa,

respectivamente. A variável, assim definida, ganha em sensibilidade no momento da escolha do ponto inicial e na visualização dos resultados do ponto ótimo uma vez que a razão de amortecimento, por exemplo, tem valores limites bem definidos como extremos. Isto é, um valor de  $\xi_a$  no neutralizador abaixo de 0.001 ou acima de 1 estaria indicando alguma anomalia no processo. Por outro lado, a componente de frequência de antirressonância (numericamente igual à frequência de ressonância) tem uma relação mais íntima com a faixa de frequência adotada para análise.

### 5.1.2 - Neutralizador Tipo Viscoelástico

No caso de materiais viscoelásticos Tipo II (região de transição) estas variáveis foram definidas como:

$$x^T = (\Omega_{a_1}, \dots, \Omega_{a_p}, C_1 \eta_{a_1}, \dots, C_1 \eta_{a_p}). \quad (5.1.2.1)$$

onde  $\eta_{a_i}$  é o fator de perda do  $i$ -ésimo neutralizador, com  $i = 1$  a  $p$ . Da mesma forma que para modelo viscoso, a constante que multiplica o fator de perda tem como finalidade elevar as componentes à mesma ordem de grandeza. Define-se da mesma forma que no item (5.1.1).

Na prática, é conveniente confeccionar os neutralizadores com o mesmo material viscoelástico. Várias razões podem motivar esta decisão. A mais significativa é que diferentes materiais, além de encarecer o custo, devido à existência de uma compra mínima para cada tipo de material, produz maior incerteza nas características dos mesmos. Assim, a variável de projeto toma a forma:

$$x^T = (\Omega_{a_1}, \dots, \Omega_{a_p}, C_1 \eta_a) \quad (5.1.2.2)$$

## 5.2 - Função Objetivo

Quando fixado um neutralizador dinâmico sobre uma estrutura qualquer (sistema primário), procura-se reduzir a resposta vibratória desta ao mínimo possível. Este tipo de solução, utilizada quando uma ou várias frequências naturais do sistema primário estão sendo excitadas de alguma forma, é denominada redução de vibração em banda larga através de neutralizadores dinâmicos.

A função objetivo deve ser escolhida de forma tal que, no processo iterativo da procura dos neutralizadores ótimos, possibilite, em todo momento, descrever o comportamento do sistema composto. Quando o ponto ótimo é encontrado, a resposta do sistema composto, medida no sistema primário, deve ser a mínima possível dentro da faixa de interesse. Várias funções objetivos podem ser propostas, entre elas:

- a) máximo valor do módulo da resposta em frequência  $\alpha_{i,j}$ , sendo  $i$  e  $j$  pontos de excitação e resposta, respectivamente. A função resposta em frequência é uma característica do sistema e, como tal, pode ser utilizada como um indicativo do comportamento do sistema composto nos passos intermediários do processo de otimização (ver capítulo IV). Matematicamente pode ser representada pela expressão (5.2.1):



$$f(x) = \max_{\Omega_1 < \Omega < \Omega_2} |\alpha_{ij}(\Omega, x)|. \quad (5.2.1)$$

sendo  $\alpha_{ij}(\Omega, x)$  a receptância do sistema composto (estrutura + neutralizadores), medida no ponto  $i$  quando excitada no ponto  $j$ ; as barras na função receptância representam o módulo;  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são as frequências inferior e superior da faixa de interesse, respectivamente;  $\Omega$  é a variável frequência em  $[\text{seg}^{-1}]$  e  $x$  é a variável de projeto, contendo informação das características dos neutralizadores.

A função  $\alpha_{ij}(\Omega)$  pode ser calculada, para sistemas primários com amortecimento viscoso, através das expressões (3.3.1.7), (3.3.1.8) e (3.3.1.11). Os parâmetros equivalentes generalizados dependerão do modelo adotado para o neutralizador. Assim, para neutralizador viscoso, utilizam-se as expressões (3.1.1.1) e (3.1.1.2) e, para neutralizador viscoelástico, as expressões (3.1.2.1) e (3.1.2.2).

Se o modelo do sistema primário é histerético, seguem-se os mesmos passos do item 3.3 do capítulo III, substituindo  $[\hat{D}_0]$  (expressão (3.3.1.8)) pela equação (3.2.2.25). Deve-se lembrar que os autovetores são complexos neste modelo.

Procura-se, assim, minimizar a resposta em frequência dentro de uma faixa de frequência de interesse preestabelecida, utilizando algum processo de otimização não linear. Escolhendo o máximo valor do módulo da resposta como função objetivo garante-se a redução do pico máximo, tanto quanto possível.

Vantagens:

- fácil de implementar;
- produz bons resultados, como será mostrado na simulação numérica deste capítulo;
- permite o controle modo a modo, utilizando técnicas de otimização que não necessitam informação da derivada.

Desvantagens:

- a função construída desta forma pode apresentar variações não suaves dentro da região de análise. Isto não permitirá utilizar técnicas de otimização que precisam informação da derivada, que acelerariam o processo de otimização significativamente;
- a escolha dos pontos  $i, j$  da função objetivo é fundamental para reduzir as vibrações dentro da faixa de frequência de interesse. Pode ocorrer que um destes pontos coincida com um nó para um certo modo e, neste caso, este modo não será controlado. Em outras palavras, trabalha-se apenas com um coeficiente da matriz resposta em frequência, que representa a característica completa do sistema;
- quando a ordem do espaço de otimização  $R^{nd}$  toma valores elevados (vários neutralizadores são analisados simultaneamente) e na faixa de frequência existem vários modos a controlar, o uso de técnicas com informação da derivada serão necessárias.

No item 5.4, mostrar-se-á o uso deste tipo de função, trabalhando com poucas componentes na variável de projeto e contendo apenas um modo na faixa de frequência de análise. Resultados e comentários serão apresentados ao final deste capítulo.

- b) Uma função mais completa que a anterior considera uma linha ou uma coluna da matriz resposta em frequência. Desta forma o sistema composto estará totalmente definido. Matematicamente, a função objetivo pode ser definida como:

$$f(x) = \left\| \max_{\Omega_1 < \Omega < \Omega_2} |\alpha^{(k)}(\Omega, x)| \right\| \quad (5.2.2)$$

onde  $k$  representa uma linha ou uma coluna da matriz de receptância  $\alpha(\Omega, x)$  e as duplas barras representam a norma Euclidiana.

O vetor de receptâncias acima pode ser calculado através da equação (3.3.1.10), considerando o sistema primário com modelo viscoso.

Vantagens:

- evita que o operador tome decisões com respeito ao ponto  $i, j$  da função resposta em frequência, que será adotada como função objetivo;
- o controle é global sobre a faixa antes mencionada;
- provoca variações suaves na função objetivo, uma vez que esta trabalha com a norma de um vetor. Desta forma o uso de técnicas de otimização mais rápidas podem ser utilizadas.

Desvantagem:

- a maior delas é que, se o modelo matemático é obtido através de técnicas de elementos finitos, o vetor coluna ou linha da matriz receptâncias pode tomar valores elevados da ordem mil ou mais elementos. Isto consumirá um elevado tempo computacional no cálculo da função objetivo dentro do processo iterativo.

c) Uma terceira função, que resulta da simples inspeção do sistema de equações no espaço modal, é a norma Euclidiana dos máximos valores absolutos dos deslocamentos principais na faixa de frequência analisada. Pode ser representada como:

$$f(x) = \left\| \max_{\Omega_1 < \Omega < \Omega_2} |P(\Omega, x)| \right\| \quad (5.2.3)$$

sendo  $P(\Omega, x)$  o vetor de deslocamentos principais. Para o cálculo destas coordenadas utilizam-se as expressões (3.3.1.2), (3.3.1.3), (3.3.1.4) e (3.3.1.5).

Esta função possui as mesmas vantagens que a anterior, com a diferença fundamental de que o sistema de equações no espaço modal é reduzido a  $\hat{n} \ll n$ . Na realidade, trabalha-se com  $\hat{n} + 2$ , uma vez que para poder representar a influência dos modos acima da frequência  $\Omega_2$  e abaixo da frequência  $\Omega_1$ , utiliza-se o conceito de resíduos superior e inferior, respectivamente, (Allemang e Brown, 1987, Ewins, 1984).

No caso particular em que a faixa de frequência contém apenas um modo de vibração, esta formulação torna-se similar à apresentada no inciso a) deste item. Recomenda-se aqui o uso de técnicas de otimização que não necessitam de informação da derivada.

É importante notar que, ainda no espaço modal, a função objetivo aqui proposta, foi construída através das coordenadas principais, acopladas pela introdução dos neutralizadores dinâmicos. Qualquer uma das três funções objetivos apresentadas aqui (incluindo a última), podem conter mais de um mínimo, produto deste acoplamento. No caso de trabalhar no subespaço modal este fato pode ser minimizado mais não evitado, uma vez que, neste, o sistema composto esta desacoplado e o único acoplamento é provocado pelos neutralizadores. Isto pode provocar que, no processo de otimização (TPNL), se caia em um ponto ótimo local.

### 5.3 - Esquema Básico na Procura dos Parâmetros Ótimos dos Neutralizadores

Na figura 5.1 mostra-se o esquema básico da metodologia adotada neste trabalho, para a redução de vibrações de uma estrutura qualquer em uma faixa de frequência. Os dados de entrada ao programa são, além dos parâmetros modais do sistema primário, informações como: a escolha da posição dos neutralizadores, quantidade dos mesmos, relação de massas  $\mu$ , faixa de frequência de análise, número de pontos na faixa anterior, número de modos a controlar, assim como seu posicionamento na matriz modal, ponto inicial de busca  $x_0$  e um parâmetro para estabelecer o critério de convergência.

Os parâmetros modais do sistema primário são as frequências naturais não amortecidas, o fator de perda modal  $\eta_j$  (coeficiente de amortecimento  $\xi_j$  para modelo viscoso) e os modos de vibrar. Estes podem ser encontrados utilizando técnicas de elementos finitos ou identificação de parâmetros (domínio do tempo ou frequência) através de medições experimentais. **Importante notar que os autovetores devem ser ortonormalizados através da matriz de massa do sistema primário.** Utilizando técnicas de elementos finitos (programas comerciais, por exemplo), isto é conseguido facilmente. No caso de identificação paramétrica deve-se verificar se o modelo matemático utilizado trabalha com os autovetores ortonormalizados.

O algoritmo de otimização utilizado pode ser o método cíclico apresentado no capítulo IV, representando as técnicas que não usam informação da derivada, e o método Quase-Newton, para os casos gerais de otimização.

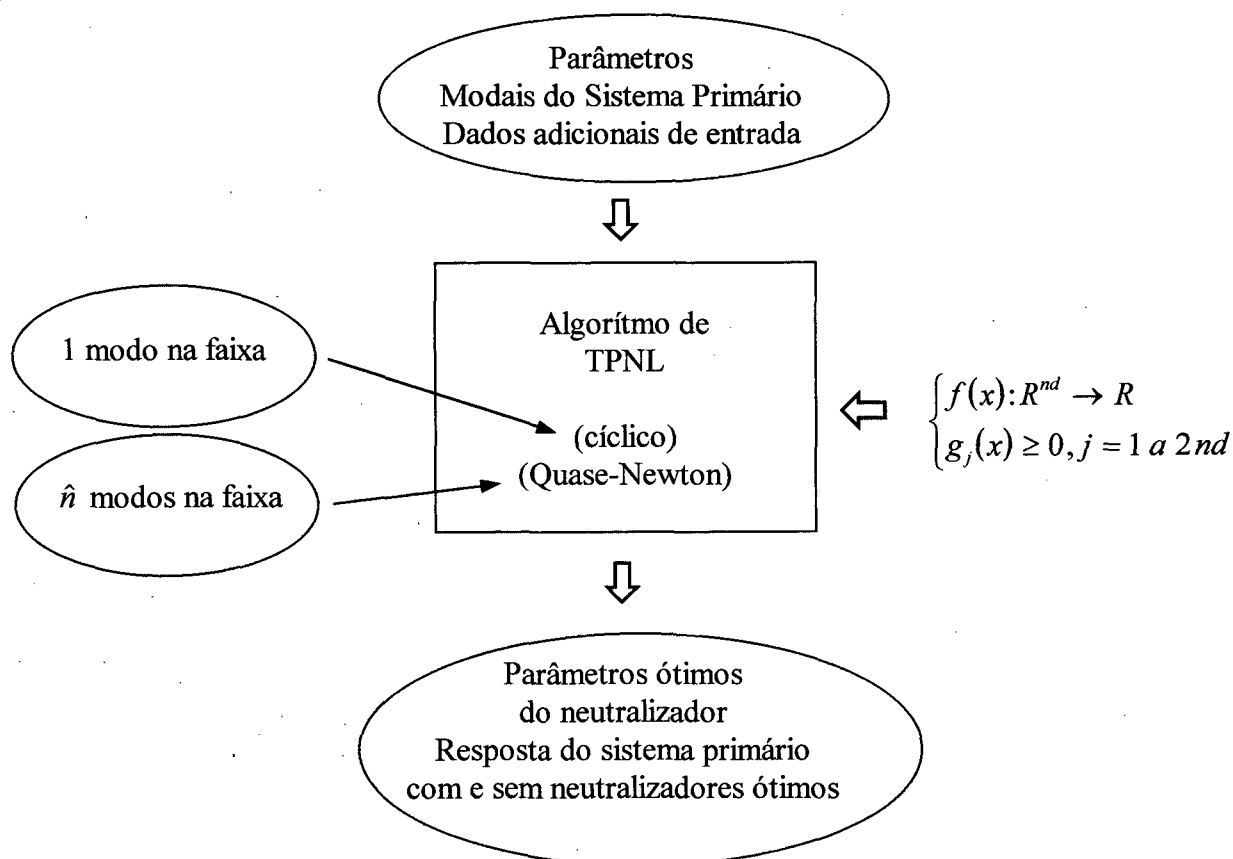


FIGURA 5.1 - Esquema básico no controle de vibrações em uma faixa de frequência.

A função objetivo apresentada no inciso a) é utilizada quando na faixa de frequência de interesse encontra-se apenas um modo de vibração. Utiliza-se, neste caso, o método cíclico.

A função objetivo do inciso c) pode ser utilizada no caso particular antes mencionado e em forma geral, onde vários modos podem ser encontrados na faixa de frequência de análise. Quando o controle é realizado na forma mais geral possível, o método de Quase-Newton será utilizado uma vez que proporcionará maior rapidez na procura do ponto ótimo assim como uma excelente convergência (capítulo VI).

A saída do programa dará os parâmetros ótimos dos neutralizadores dinâmicos e o efeito que estes produziram na estrutura primária ao qual serão fixados, tanto na faixa de frequência de interesse quanto fora da mesma.

Se o modelo matemático é viscoelástico Tipo II, os parâmetros ótimos obtidos no processo de otimização serão:

$$m_{a_i}^*, \Omega_{a_i}^*, \eta_{a_i}^*, i = 1 \text{ a } p. \quad (5.3.1)$$

Ao construir os neutralizadores dinâmicos, a escolha do material viscoelástico deve respeitar a hipótese feita sobre material viscoelástico Tipo II (região de transição). Os passos a seguir na construção prática, partindo do ponto ótimo e considerando todos os neutralizadores com igual material viscoelástico são:

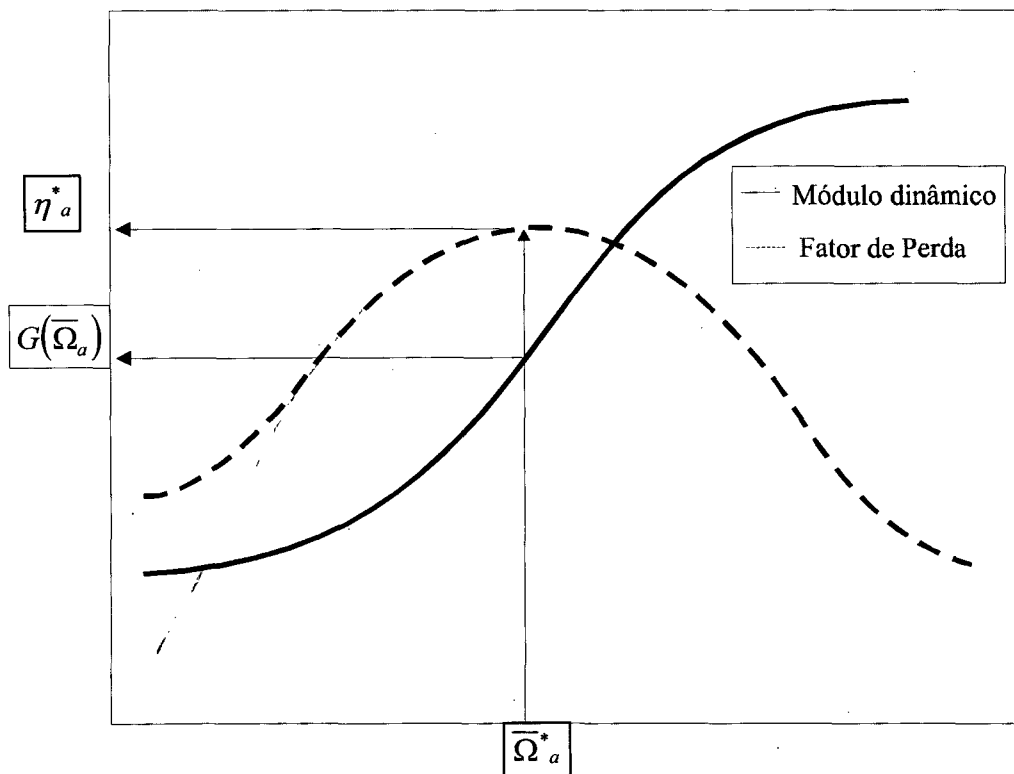


FIGURA 5.2 - Escolha do material viscoelástico através dos parâmetros ótimos.

- toma-se o valor médio das frequências de antirressonâncias  $\overline{\Omega_a}$  dos  $p$  neutralizadores e escolhe-se um material viscoelástico de forma que o máximo valor do fator de perda (conhecido ou fixado) coincida com aquela frequência (ver figura 5.2). Outros dados importantes sobre o material viscoelástico devem ser considerados. Entre eles, efeitos que possam influenciar a vida útil do material, como por exemplo o ambiente de trabalho.
- Uma vez que o material tenha sido escolhido, para cada  $\Omega_{a_i}^*$ , com  $i = 1$  a  $p$ , um valor do módulo de cisalhamento  $G(\Omega_{a_i}^*)$  será encontrado. Com estes parâmetros e a massa  $m_{a_i}^*$  determina-se o fator de forma que servirá para desenhar e construir os neutralizadores dinâmicos. A frequência de antirressonância foi definida no capítulo III como:

$$\Omega_{a_i}^* = \sqrt{\frac{L G(\Omega_{a_i}^*)}{m_{a_i}^*}} \quad \text{com } i = 1 \text{ a } p.$$

Se as massas dos neutralizadores são iguais, o fator de forma  $L$  para cada neutralizador será:

$$L_i = \frac{\Omega_{a_i}^{*2} m_a^*}{G(\Omega_{a_i}^*)} \quad (5.3.2)$$

com  $L_i = \frac{A_i}{h}$ ,  $i = 1$  a  $p$ , para neutralizador submetido a cisalhamento puro, onde  $A_i$  e  $h$  são a área de cisalhamento de cada neutralizador e a espessura do material cisalhado, respectivamente.

Para casos práticos, considerando a massa constante para todos os neutralizadores e mesma espessura de material viscoelástico, diferentes áreas de cisalhamento produziram as diferentes frequências naturais necessárias para o controle. No capítulo VI, estes passos serão mostrados com maior detalhe, quando a construção dos neutralizadores dinâmicos simples for realizada no ensaio experimental final.

## 5.4 - Simulação Numérica

O sistema primário é uma viga Euler - Bernoulli engastada livre. O material da viga é aço laminado, perfil americano I 10" x 4 5/8". As características físicas e geométricas são:

$$\begin{aligned} L_v &= 3 \text{ [m]} && \text{(comprimento da viga),} \\ E &= 20 \cdot 10^{10} \text{ [N / m}^2\text{]} && \text{(módulo de Young),} \\ I &= 6.576 \cdot 10^{-5} \text{ [m}^4\text{]} && \text{(momento de inércia).} \end{aligned}$$

A viga foi dividida em quatorze elementos considerando apenas graus de liberdade de deslocamento em  $y$ , figura 5.3. Devido às características dos neutralizadores (neutralizadores simples) foram desprezadas as rotações nos nós da viga. Como mostrado na figura 5.4a e 5.4b, dois neutralizadores foram fixados na estrutura primária (no meio e no extremo livre). Na figura 5.4c mostra-se novamente o conceito de sistema equivalente para os neutralizadores dinâmicos, tanto para modelo viscoelástico quanto para modelo viscoso.

Como explicado no começo deste capítulo, a simulação numérica aqui apresentada mostrará o comportamento da metodologia proposta para o caso extremo em que, na banda de frequência, exista apenas um modo de vibração ou frequência natural. Variações na faixa de

freqüência, passando de banda larga para banda estreita, por exemplo, fazem visualizar o funcionamento do programa, mostrando a equivalência conceptual com as técnicas apresentadas por Den Hartog (1956), para sistemas de um grau de liberdade. Diferentes pontos ótimos para diferentes faixas de freqüência escolhidas, mostraram a influência da banda sobre a análise. A introdução de amortecimento na estrutura mostrará, também, o efeito benéfico dos neutralizadores na estrutura primária para freqüências fora da região de controle.

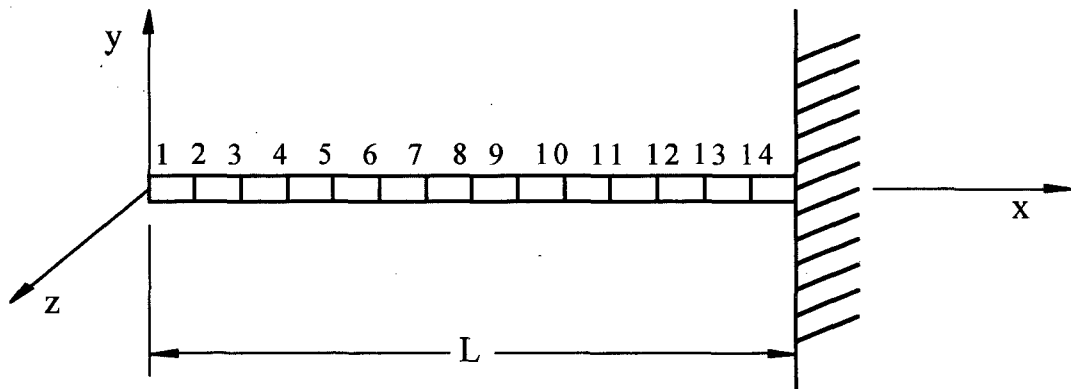
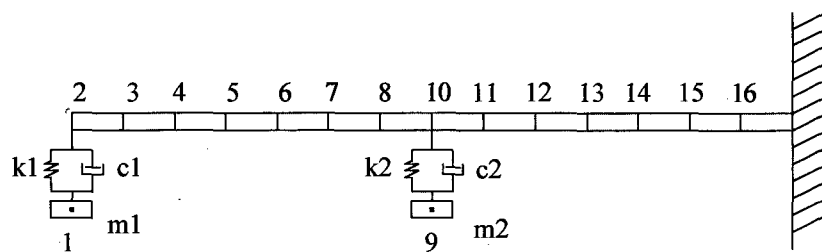
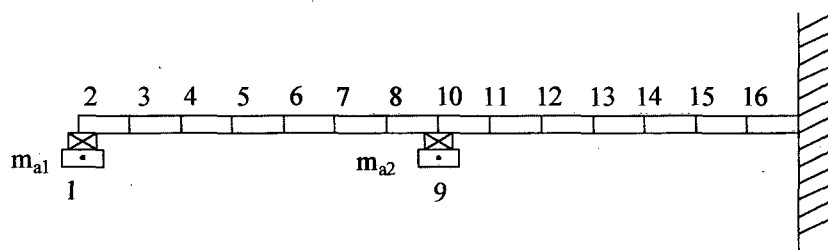


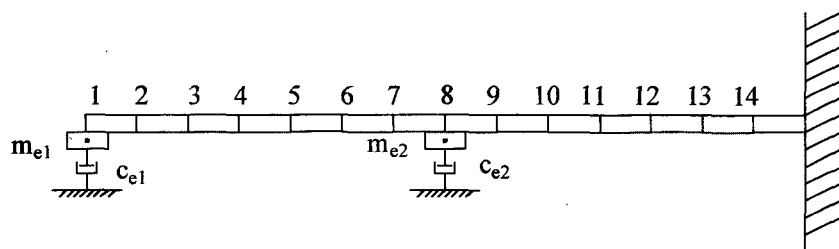
FIGURA 5.3 - Viga engastada - livre (sistema primário)



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5.4 - Sistema composto. a) neutralizador modelo viscoso b) neutralizador modelo viscoelástico c) neutralizador modelado com parâmetros equivalentes generalizados

### 5.4.1 - Parâmetros Modais da Estrutura

Com o auxílio dos coeficientes de influência (Espíndola, 1985), foram calculadas as matrizes de massa e flexibilidade, da viga engastada livre. Com estas matrizes, encontram-se os autovalores e autovetores do problema não amortecido (ver capítulo III). A partir dos autovalores obtém-se as frequências naturais não amortecidas do sistema. Os resultados são apresentados na tabela 5.1. Em 5.1 a) podem ser visualizadas as frequências naturais não amortecidas e em 5.1 b) os modos de vibrar associados do sistema primário.

TABELA 5.1- Parâmetros modais do sistema primário a) frequência natural não amortecida  
b) formas de vibrar

$$\Omega = [185.48 \ 1156 \ 3220 \ 6277 \ 10330 \ 15310 \ 21250 \ 28070 \ 35640 \ 44130 \ 52000 \ 59750 \ 66150 \ 70360]$$

(a)

$\Phi =$	0.151	-0.149	0.146	-0.141	0.135	0.125	-0.113	0.099	0.083	-0.072	0.012	-0.039	0.055	0.025
	0.136	-0.098	0.062	-0.024	-0.012	-0.045	0.071	-0.088	-0.095	0.098	-0.023	0.067	-0.085	-0.045
	0.121	-0.047	-0.015	0.065	-0.094	-0.095	0.067	-0.021	0.03	-0.08	0.043	-0.101	0.102	0.079
	0.107	$5.53 \times 10^{-5}$	-0.072	0.099	-0.07	-0.002	-0.07	0.106	0.087	-0.025	-0.061	0.096	-0.047	-0.099
	0.092	0.042	-0.098	0.066	0.026	0.098	-0.089	0.005	-0.08	0.103	0.076	-0.056	-0.036	0.103
	0.078	0.075	-0.089	-0.008	0.1	0.072	0.044	-0.106	-0.041	-0.077	-0.088	-0.005	0.095	-0.089
	0.064	0.097	-0.05	-0.08	0.084	-0.049	0.101	0.013	0.107	-0.026	0.097	0.066	-0.093	0.06
	0.051	0.108	0.006	-0.106	-0.009	-0.104	-0.017	0.102	-0.023	0.101	-0.102	-0.102	0.031	-0.022
	0.039	0.106	0.062	-0.071	-0.093	-0.025	-0.106	-0.029	-0.093	-0.074	0.102	0.098	0.052	-0.02
	0.028	0.095	0.102	0.006	-0.092	0.088	-0.011	-0.099	0.08	-0.027	-0.098	-0.057	-0.102	0.059
	0.019	0.075	0.114	0.081	-0.005	0.084	0.102	0.045	0.044	0.1	0.091	-0.003	0.086	-0.089
	0.011	0.05	0.097	0.113	0.089	-0.031	0.039	0.092	-0.105	-0.071	-0.079	0.062	-0.011	0.102
	0.005	0.026	0.059	0.09	0.109	-0.112	-0.097	-0.065	0.021	-0.028	0.064	-0.099	-0.072	-0.099
	0.001	0.007	0.019	0.034	0.05	-0.066	-0.081	-0.094	0.103	0.108	-0.049	0.106	0.115	0.085

(b)

Prever a matriz de amortecimento viscoso é uma tarefa difícil de realizar, devido aos diferentes mecanismos de dissipação de energia que qualquer sistema vibratório possui. Uma forma de estabelecer o amortecimento é através da relação de amortecimento modal, parâmetro modal que resta para caracterizar o sistema primário. Supõe-se que a relação de amortecimento

modal  $\xi_j = \frac{c_j}{c_{cj}}$  é constante e igual a  $1.10^{-4}$ , valor razoável para aço em geral.

### 5.4.2 - Funções Objetivos

As funções objetivos utilizadas foram as apresentadas no item 5.2 a) e 5.2 c). A utilização de ambas funções teve como objetivo a verificação de seus desempenhos.

### 5.4.3 - Vetor de Projeto

Nesta simulação numérica, a primeira utilizando todos os conceitos abordados até aqui, usou-se o vetor de projeto  $x$  apresentado em (5.1.1.3) ou (5.1.2.1) (dependendo do modelo do neutralizador). Aqui, o vetor de projeto foi considerado, por razões didáticas, o mais geral possível. Desta forma a massa dos neutralizadores será a mesma e as frequências de antirressonância e amortecimentos, diferentes para cada neutralizador. Isto é, trabalha-se com materiais viscoelásticos diferentes para cada neutralizador. Na prática, por razões antes mencionadas, todos estes dispositivos serão estudados e construídos do mesmo material viscoelástico, usando-se o vetor de projeto dado pela equação (5.1.2.2).

### 5.4.4 - Técnicas de Otimização

O método implementado foi o método Cíclico, variante do método de Powell, apresentado no capítulo IV. Este método é escolhido aqui uma vez que, o fato de se ter uma frequência natural apenas na banda de frequências de análise, a função objetivo pode não ser diferenciável. Assim, para os casos particulares em que na faixa de frequência encontra-se um modo apenas e para as funções objetivos propostas neste trabalho, técnicas de otimização que não utilizam informação da derivada, fornecem uma saída para o problema de controle passivo. No caso geral, filosofia desta metodologia de trabalho, as funções objetivos aqui propostas permitem o uso de técnicas de otimização mais rápidas como será mostrado no capítulo VI. Isto fica garantido pelo fato de que a otimização é realizada sobre a norma de um vetor (mínimos quadrados).

### 5.4.5 - Dados Adicionais no Processo de Otimização

Além do modelo modal do sistema primário é necessário conhecer os seguintes parâmetros:

- número de neutralizadores = 2,
- localização dos neutralizadores = [1 8],
- número de modos na faixa de frequência = 1,
- identificação numérica dos modos na faixa de frequência escolhida = 1,
- número de pontos escolhidos na faixa de frequência = 100,
- faixa de frequência de interesse = [100 300] [rad./seg.],
- número de modos computados  $\hat{n}=5$ ,
- relação de massas  $\mu = 0.1$ ,
- limites inferior e superior para as componentes do vetor de projeto = [1 1000]  
(Numericamente, adotou-se a mesma restrição de desigualdade para todas as componentes do vetor de projeto).



■ vetor de projeto inicial  $x_0 = (150 \ 150 \ 150 \ 150)^T$ .

### 5.4.6 - Resultado 1

A figura 5.5 mostra a resposta em frequência do sistema primário do ponto 1 quando excitado no ponto 1, com e sem neutralizador. Na figura 5.5a considerou-se modelo viscoso para o neutralizador e na figura 5.5b modelo viscoelástico. A função objetivo usada foi apresentada no item 5.2 a).

Na tabela 5.2 mostram-se os parâmetros ótimos dos neutralizadores obtidos no processo de otimização.

TABELA 5.2 - Parâmetros ótimos para modelo viscoso e viscoelástico.

Parâmetros de projeto	Figura 5.4 (a)		Figura 5.4 (b)	
		$\Omega_a$ (seg <sup>-1</sup> )		$\Omega_a$ (seg <sup>-1</sup> )
$\xi_{a1}$	0.1813	168.87 162.4	0.1282	164.862 144.402
$\xi_{a2}$	0.2508		0.1077	
$m_{a1}$ (Kg)	3.92		3.92	
$m_{a2}$ (Kg)	3.92		3.92	

Observa-se, da figura 5.5a e b, a equivalência entre: o controle realizado em uma estrutura de múltiplos graus de liberdade, quando na faixa de frequência encontra-se um modo apenas e o controle feito em um sistema de um grau de liberdade através de um neutralizador simples (Den Hartog, 1956, capítulo II). Nesta figura, pode-se observar como os picos do sistema composto (estrutura + neutralizadores ótimos), situam-se na mesma altura, da mesma forma que o controle feito em banda larga através dos pontos fixos no capítulo II. Cabe aclarar que isto é uma consequência do processo de otimização, não sendo provocado previamente pelo método utilizado no controle, como a teoria dos pontos fixos (capítulo II). Este fato importante mostra que esta teoria, no caso particular de um sistema com múltiplos graus de liberdade, ao controlar apenas um modo, comporta-se de forma similar às técnicas de controle modo a modo.

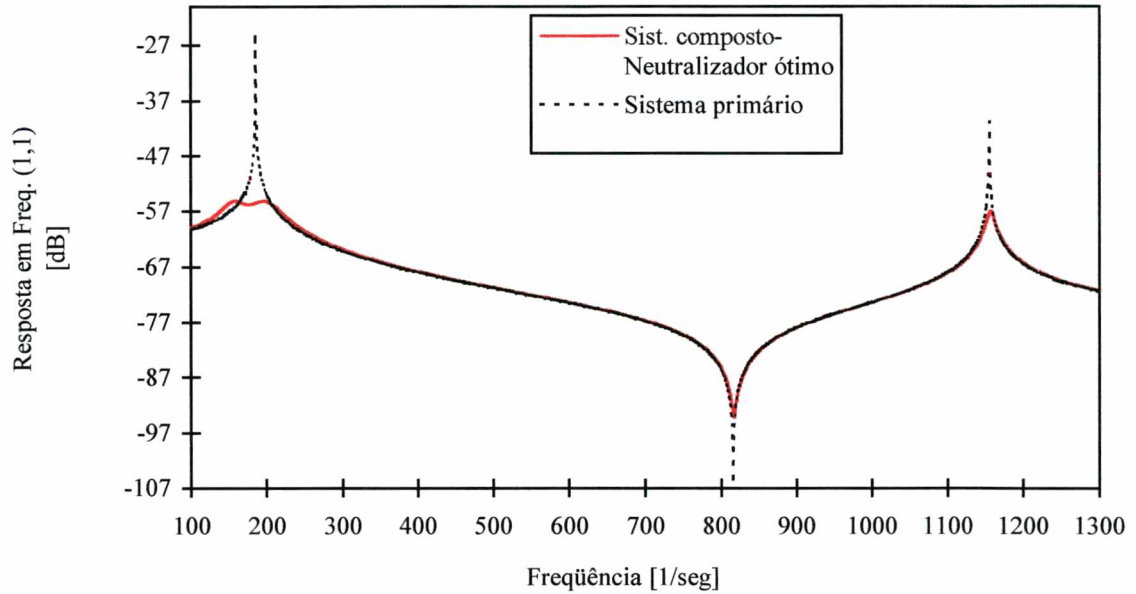
A figura 5.5b mostra que o modelo viscoelástico produz uma redução maior (2 [dB] aproximadamente), quando comparado com o modelo viscoso. Uma análise mais detalhada em relação a este fato, pode ser encontrado em Alvarenga (1994).

Na tabela 5.2, o amortecimento do sistema primário (fator de perda) foi colocado em termos da razão de amortecimento modal  $\xi_a$ . Como visto no anexo 1  $\eta_a \cong 2 \xi_a$  na ressonância.

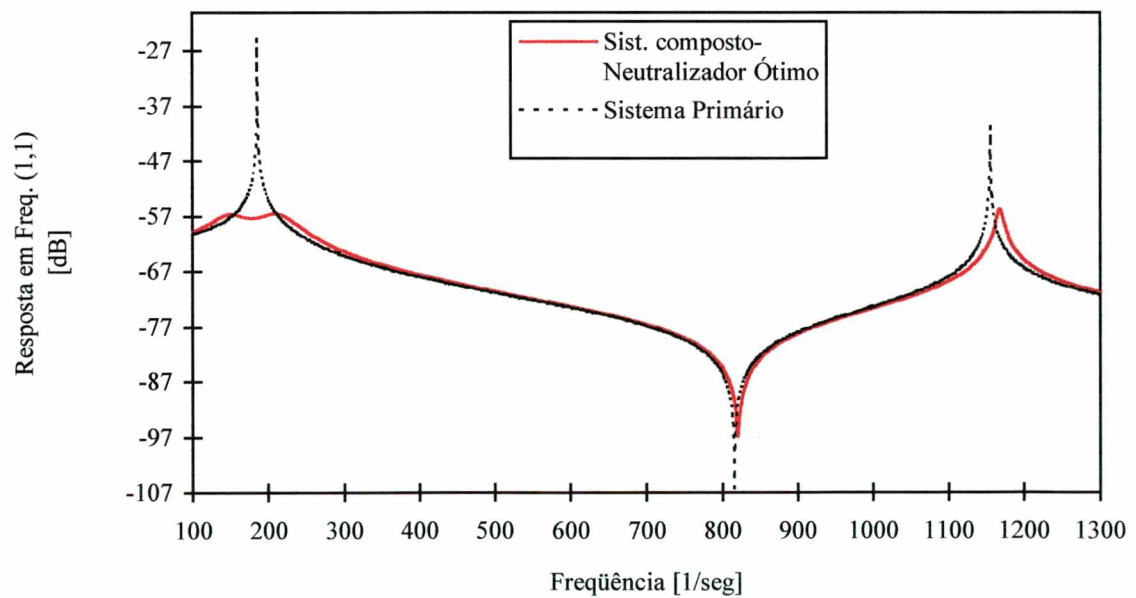
### 5.4.7 - Resultado 2

Continuando com a semelhança desta metodologia e aquela proposta por Den Hartog (1956), uma redução na banda de frequências será realizada (banda larga para banda estreita). Na figura 5.6 realizou-se o controle da viga engastada livre (figura 5.3), com os mesmos dados que

do item anterior, salvo pela faixa de frequência escolhida, passando de [100 300] para [150 200]  $[seg^{-1}]$ .



(a)

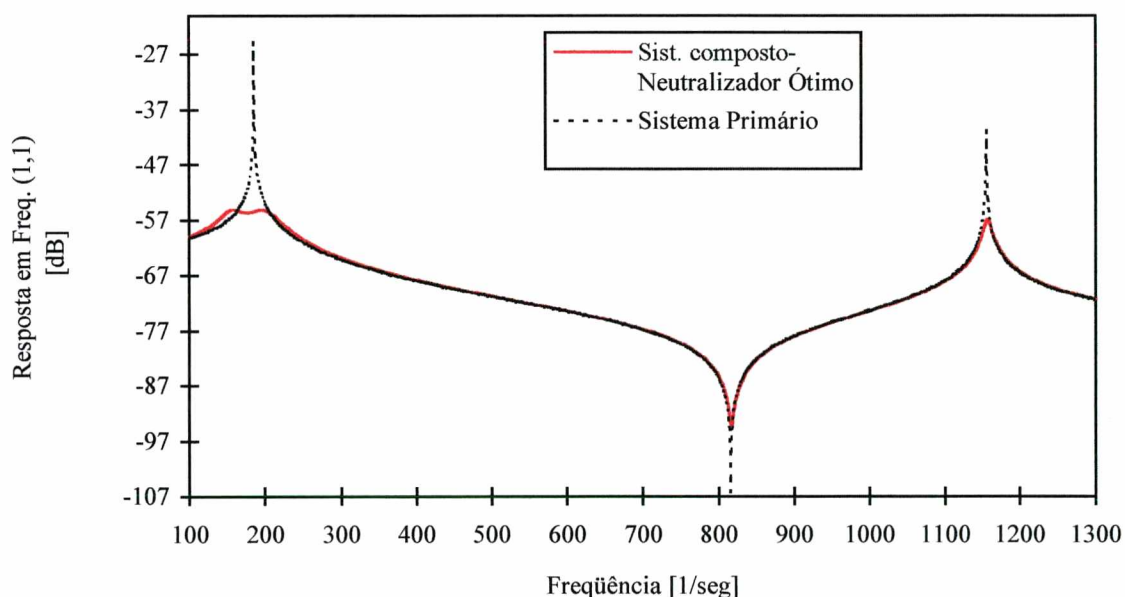


(b)

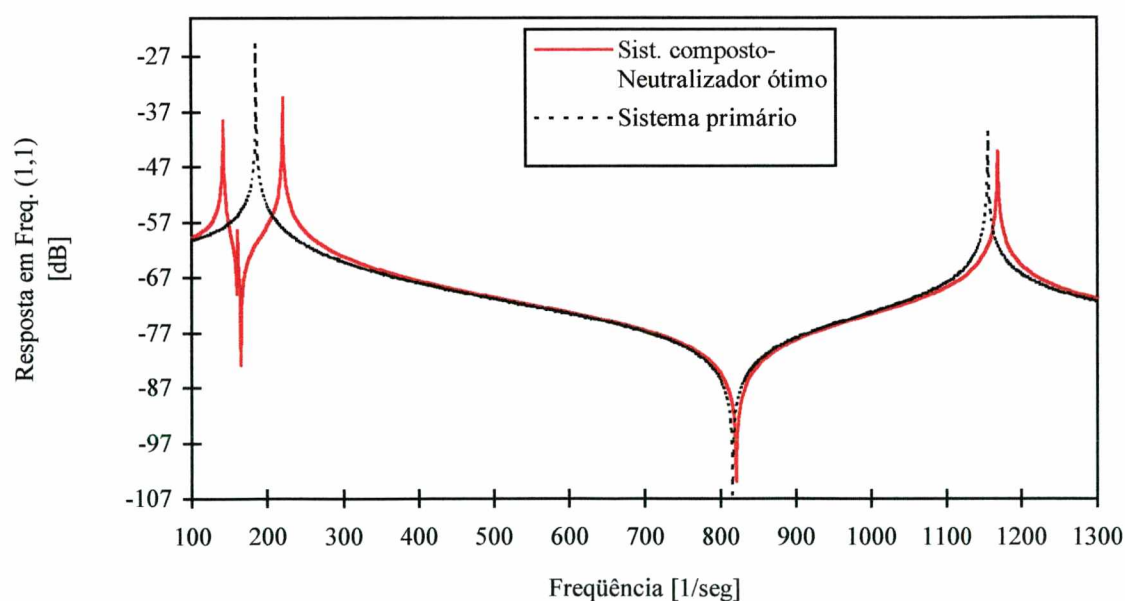
FIGURA 5.5 - a) Neutralizador modelo viscoso b) neutralizador modelo viscoelástico.

Na figura 5.6b, mostra-se o efeito no controle produzido ao diminuir a banda de frequência. A medida que a faixa de frequência diminui, o método aqui proposto tentará diminuir o máximo possível o vale formado pelos picos do sistema composto.

O único parâmetro que torna isto possível é a diminuição do amortecimento do neutralizador. Na figura 5.6a este fenômeno não está presente, ainda, uma vez que os picos do sistema composto, para modelo viscoso, estão mais próximos se comparados com o modelo viscoelástico. Assim estes picos continuam dentro da faixa e por tal motivo estão sendo controlados. Se a faixa de frequência continua diminuindo, o fenômeno de banda estreita também aparecerá neste modelo.



(a)



(b)

FIGURA 5.6 - a) Modelo viscoso b) modelo viscoelástico.

A tabela 5.3 apresenta os parâmetros ótimos dos neutralizadores dinâmicos, obtidos na faixa de frequência  $[150\ 200]\ \text{seg}^{-1}$ .

TABELA 5.3 - Parâmetros ótimos em uma faixa estreita de frequência.

Parâmetros de projeto	Figura 5.5 (a)		Figura 5.5 (b)	
		$\Omega_a$ ( $\text{seg}^{-1}$ )		$\Omega_a$ ( $\text{seg}^{-1}$ )
$\xi_{a1}$	0.1752	168.04 182.603	0	164.91 159.54
$\xi_{a2}$	0.2958		0	
$m_{a1}(\text{Kg})$	3.92		3.92	
$m_{a2}(\text{Kg})$	3.92		3.92	

Novamente é importante aclarar que este fenômeno de banda estreita também atingirá ao modelo viscoso uma vez que a faixa de frequência continue diminuindo. O fato de mostrar aqui este fenômeno é simplesmente para comparar esta metodologia com a metodologia implementada para sistemas simples de um grau de liberdade.

De forma geral e em completa concordância com o fenômeno de banda estreita para sistemas de um grau de liberdade, quando a banda de frequência começa a se estreitar ao redor da frequência natural a controlar, a frequência natural do neutralizador tende a se igualar com a da estrutura e o seu amortecimento tende para zero.

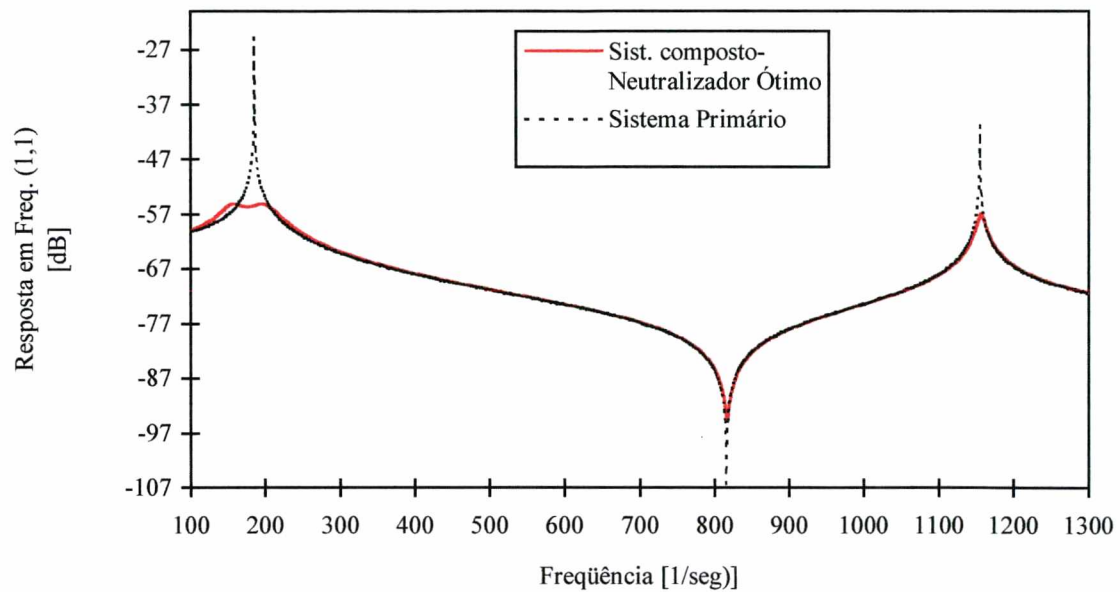
#### 5.4.8 - Resultado 3

Na figura 5.7a e b utilizou-se a função objetivo proposta no item 5.2 c) (expressão (5.2.3) no espaço modal). Os dados foram os mesmos utilizados em 5.4.6 (Resultado 1).

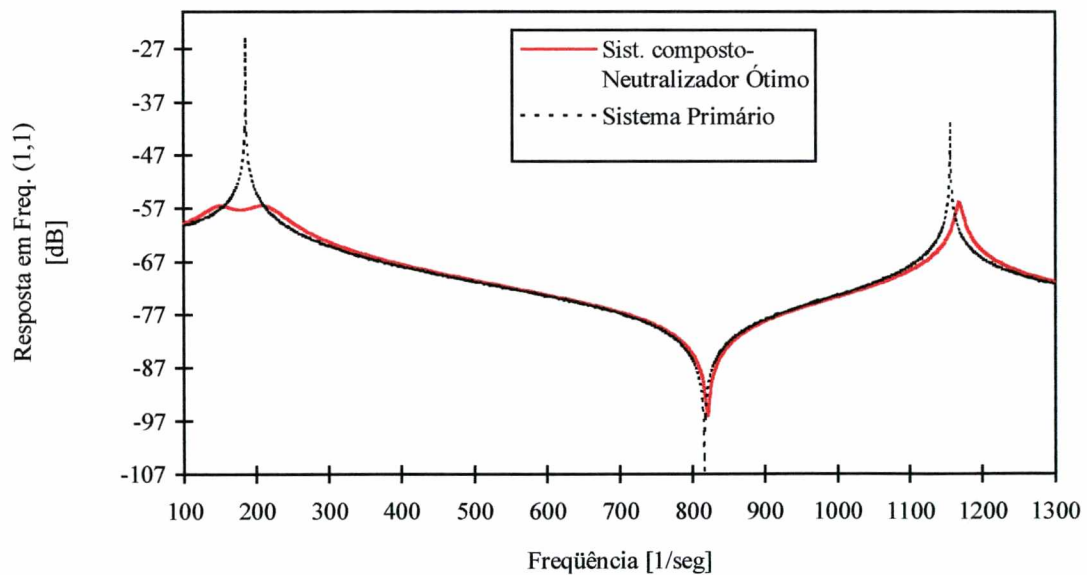
A tabela 5.4 mostra os parâmetros ótimos dos neutralizadores quando a função objetivo é construída a partir dos deslocamentos principais.

TABELA 5.4 - a) Neutralizador com amortecimento viscoso b) neutralizador tipo viscoelástico.

Parâmetros de projeto	Figura 5.6 (a)		Figura 5.6 (b)	
		$\Omega_a$ ( $\text{seg}^{-1}$ )		$\Omega_a$ ( $\text{seg}^{-1}$ )
$\xi_{a1}$	0.186	168.79 165.417	0.13	164.55 146.93
$\xi_{a2}$	0.22		0.1277	
$m_{a1}(\text{Kg})$	3.92		3.92	
$m_{a2}(\text{Kg})$	3.92		3.92	



(a)



(b)

FIGURA 5.7 - a) Amortecimento viscoso b) amortecimento viscoelástico.

As duas funções propostas produzem praticamente o mesmo resultado na redução de vibração de uma estrutura em uma faixa de frequência. Importante notar que a análise foi realizada para um modo de vibração apenas, caso extremo quando utilizada a metodologia proposta neste trabalho. O estudo do mesmo serve para visualizar o comportamento desta proposta, frente a estes casos extremos e seu funcionamento em geral.



Estes resultados mostram que ambas funções podem ser utilizadas indistintamente para o controle de uma estrutura em banda larga. Isto é importante, uma vez que a função objetivo calculada através dos deslocamentos principais é mais adequada para trabalhar em forma geral, quando na faixa de análise encontram-se mais de um modo a ser controlado.

#### 5.4.9 - Resultado 4

A eficiência dos neutralizadores depende do amortecimento considerado no sistema primário. O conhecimento desta relação é importante para estabelecer, com certa precisão, a real redução obtida através do controle de vibração. A maioria das simulações numéricas encontradas na literatura, consideram o amortecimento do sistema primário praticamente nulo, obtendo reduções, através do uso de neutralizadores dinâmicos, da ordem de 60 [dB], ou maior. Esta escolha é feita pelas seguintes razões: para poder utilizar técnicas de cálculo para achar os parâmetros ótimos dos neutralizadores (técnicas dos pontos fixos) e porque a formulação foi feita no espaço físico (praticamente impossível determinar a matriz de amortecimento). Estes valores de redução não são reais, podendo levar a erros conceptuais. Como visto no capítulo II, os neutralizadores ótimos calculados através de uma estrutura que foi considerada sem amortecimento, deixa de ser tal na prática. Isto é, as condições para as quais este neutralizador foi projetado são diferentes na prática, tendo grandes variações à medida que a dissipação do sistema primário aumenta. Todo sistema dissipa energia em maior ou menor medida.

Utilizando a metodologia proposta neste trabalho podem-se encontrar os neutralizadores dinâmicos ótimos, considerando o sistema primário com o amortecimento tão real quanto possível. As reduções em [dB], obtidas através dos neutralizadores ótimos, pela mesma razão, serão valores coerentes com a realidade.

Fazendo uso da técnica aqui apresentada, realizou-se uma simulação numérica similar ao item 5.4.6, para vários valores de  $\xi$  no sistema primário. Os dados de entrada e função objetivo utilizada foram os mesmos da figura 5.5a.

Na figura 5.8 mostra-se a relação entre a redução da resposta do sistema primário, com e sem neutralizador e a relação de amortecimento do sistema primário.

Define-se:

Ganho = diferença da resposta entre sistema primário e sistema composto com neutralizador ótimo (relação de massas  $\mu = 0.1$ ), em [dB].

Ganho1 = diferença da resposta entre sistema primário e sistema composto com neutralizador ótimo ( $\mu = 0.25$ ), em [dB].

$\xi$  = relação de amortecimento de sistema primário. Adimensional.

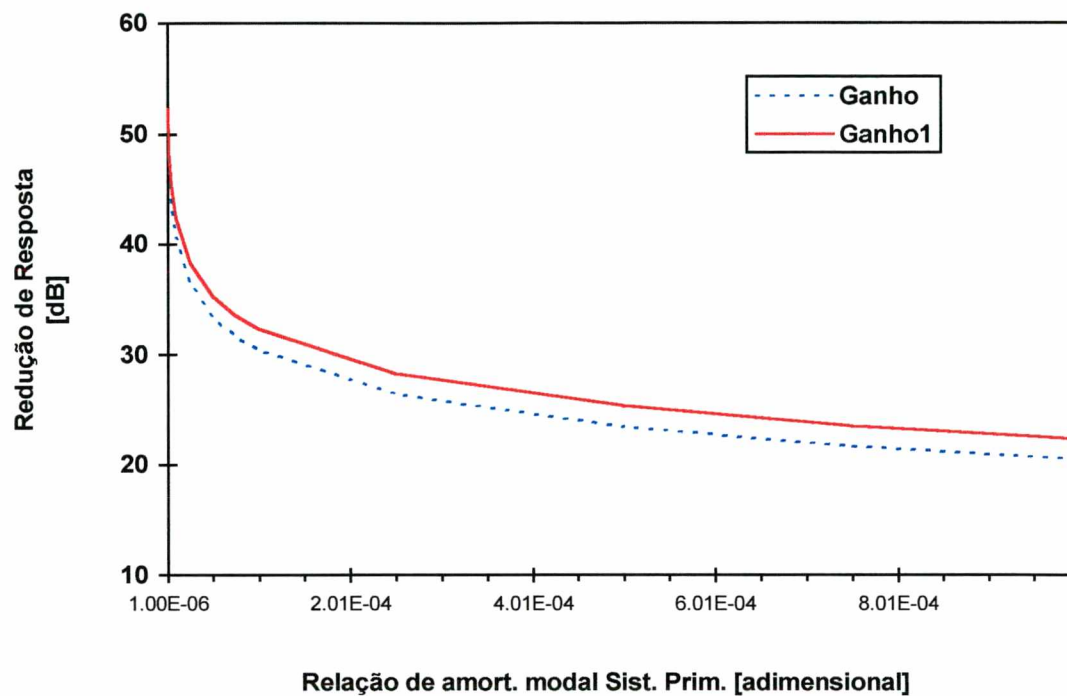


FIGURA 5.8 - Relação entre redução da resposta em [dB] e a razão de amortecimento  $\xi$  do sistema primário.

Da figura 5.8 pode-se observar que:

- a redução da resposta (Ganho ou Ganho1) decresce exponencialmente com o aumento do amortecimento do sistema primário. O conhecimento preciso deste, garante um valor de redução real e um funcionamento ótimo dos neutralizadores (ver capítulo II).
- Trabalhando com  $\mu = 0.25$  consegue-se uma redução de 2 [dB] a mais, quando comparada com a relação  $\mu = 0.1$ , para este caso particular. Esta redução é conseguida com um aumento considerável da massas do neutralizador, o que pode não compensar, na prática.

## 5.5 - Conclusões

Foi apresentada uma metodologia geral para controle de vibração de sistemas primários com múltiplos graus de liberdade (modelo viscoso proporcional), através de neutralizadores dinâmicos simples. O controle é realizado em uma faixa de frequência com uma formulação tanto efetiva quanto geral no espaço modal, com auxílio de técnicas de otimização não linear. Assim, qualquer sistema primário, de qualquer complexidade, modelado por elementos finitos ou via identificação de parâmetros de respostas em frequência medidas experimentalmente, pode ser controlado em uma faixa de frequência.

Uma simulação numérica foi introduzida com a intenção de mostrar o princípio básico de funcionamento do programa, utilizando uma metodologia nova sobre controle passivo de vibrações. Distintos resultados foram apresentados para um caso particular (viga engastada livre), utilizando dois neutralizadores para o controle em uma faixa de frequência. Nesta, encontra-se um modo de vibração apenas do sistema primário.



Observa-se que o desempenho dos neutralizadores depende do amortecimento designado para o sistema primário. Predizer este em uma estrutura qualquer é uma tarefa difícil e até impraticável devido aos vários mecanismos de dissipação de energia que podem ser encontrados na mesma. Utilizando o modelo modal dessa estrutura através de identificação de parâmetros, por exemplo, o amortecimento pode ser predito de forma simples e realista. Isto assegura, como foi visto no capítulo II, uma boa performance dos neutralizadores ótimos, como também, uma real redução da resposta na faixa de análise do sistema primário.

A escolha de uma faixa de frequência estreita ao redor de uma frequência natural da estrutura, induzirá neutralizadores ótimos com baixo amortecimento. Para estes casos a sintonização é caracterizada pelo baixo amortecimento e a frequência natural do neutralizador aproximando-se à frequência natural do modo de controlar do sistema primário. Este resultado não só é óbvio (Den Hartog, 1956), como também ótimo. Entretanto, na prática, é conveniente não procurar este tipo de solução por dois motivos:

- o modelo viscoelástico tem a capacidade de introduzir um elevado amortecimento na estrutura, sempre importante para dissipação de energia em qualquer estrutura vibratória. Trabalhar com um fator de perda praticamente nulo significaria não utilizar o grande potencial destes materiais.
- Se, em algum momento a excitação sobre a estrutura, sai fora da faixa de frequência estreita, a resposta do sistema pode ser elevada, como mostrado na figura 5.5 b). Isto é causado pelo baixo amortecimento do neutralizador, produto da faixa de frequência estreita escolhida.

Em geral a filosofia do método aqui proposto é para trabalhar em banda larga, assim, este tipo de inconveniente não aparecerá. Por precaução, como a escolha desta faixa de frequência, fica por conta do operador, é importante ressaltar que, se esta é estreita ao redor da uma ressonância o amortecimento ótimo dado pelo programa será praticamente nulo. Em geral é aconselhável trabalhar com um certo valor de amortecimento, sendo assim, a faixa de frequência deverá ser incrementada pelo usuário, para que isto aconteça.



# **CAPÍTULO VI**

**EXEMPLO NUMÉRICO – PRÁTICO.  
CORROBORAÇÃO DE RESULTADOS**

## CAPÍTULO VI: EXEMPLO NUMÉRICO - PRÁTICO. CORROBORAÇÃO DE RESULTADOS

Serão introduzidos os parâmetros modais (características da estrutura primária), obtidos via identificação através de respostas em frequência medidas experimentalmente, assim como as técnicas utilizadas para tal fim. Uma explicação breve das medições experimentais será apresentada em conjunto com o esquema básico de medições.

Conhecendo as características modais do sistema primário e utilizando técnicas de otimização não linear, calculam-se os neutralizadores ótimos. Curvas teóricas de resposta em frequência do sistema primário e do sistema composto mostrarão a eficiência em decibéis [dB] dos neutralizadores.

Mostram-se os passos necessários para a construção dos neutralizadores dinâmicos, com material viscoelástico disponível no laboratório e características conhecidas (Anexo 3). Comparam-se, para estes dispositivos, as frequências naturais teóricas e experimentais.

Curvas de resposta em frequência experimental do sistema primário e sistema composto com neutralizador ótimo serão levantadas para comparação com os resultados teóricos, obtidos anteriormente.

### 6.1 - Parâmetros Modais do Sistema Primário

Para mostrar a generalidade do método, apresentado neste trabalho, será implementado um estudo teórico-prático sobre a redução da resposta de uma chapa de aço. A chapa (estrutura ou sistema primário) tem as seguintes dimensões e características mecânicas :

240x360x6 mm

massa total = 4 Kg

$E = 20 \cdot 10^{10} \text{ N / m}^2$ .

Para realizar as medições de resposta em frequência da estrutura primária, dividiu-se a mesma em 54 elementos, como mostra a figura 6.1. Nesta figura observa-se a espuma de poliuretano na qual a chapa é apoiada. Como a rigidez da base de poliuretano é muito menor do que a de flexão da placa, tudo se passa como se esta estivesse livre no espaço, salvo para frequências bem baixas (muito menor do que a primeira frequência natural de flexão). Isto provocará, também, um amortecimento adicional que facilitará a identificação dos parâmetros modais.

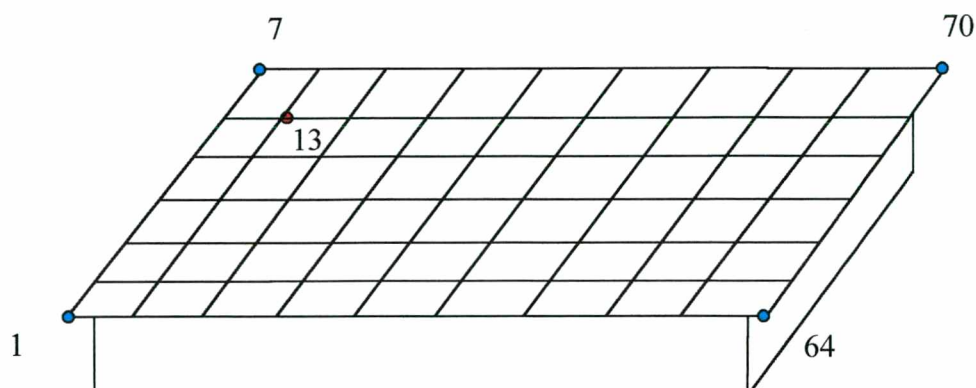


FIGURA 6.1 - Sistema primário

### 6.1.1 - Medições das Respostas em Frequência do Sistema Primário

Com ajuda de um acelerômetro Brüel & Kjaer, tipo 4375 e um martelo, tipo PCB Piesotronics modelo 086B03, série 6535, obtiveram-se as respostas em frequência da chapa. Fixando o acelerômetro no ponto 13 e excitando nos restantes, foi possível achar uma coluna da matriz resposta em frequência. Neste caso, mediu-se aceleração como resposta, portanto, a resposta em frequência associada é a inertância. Esta contém toda a informação da estrutura a controlar, podendo-se, a partir da mesma, extrair as características modais, como será mostrado posteriormente. Na figura 6.2 pode-se visualizar o esquema experimental, seguido nestas medições.

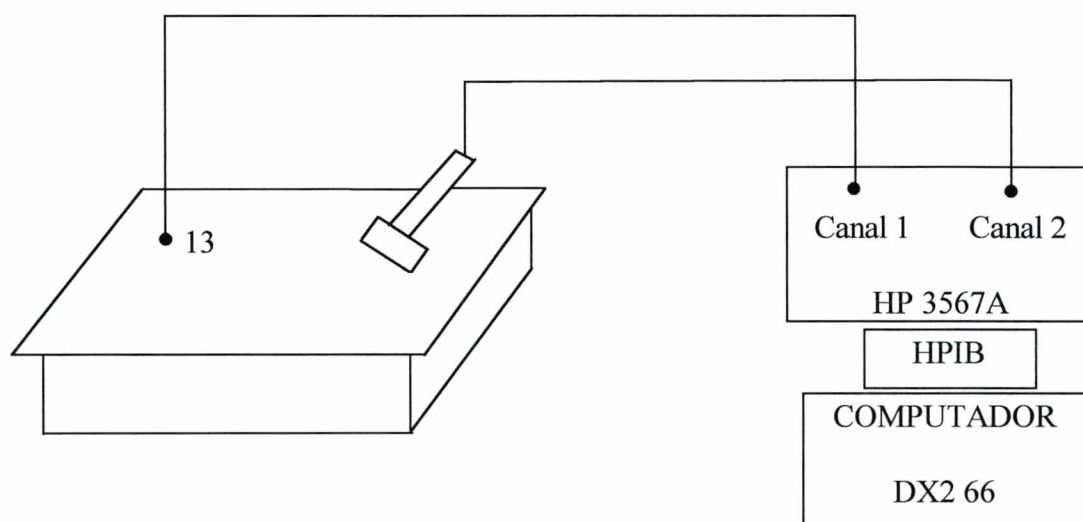


FIGURA 6.2 - Cadeia experimental na medição das respostas em frequência do sistema primário.

Os dados utilizados no experimento foram:

- faixa de frequência =  $0 \text{ a } 1600 \text{ [Hz]}$ ;
- número de linhas espectrais = 400;
- janela Force/Exponencial;
- médias = 10;
- sensibilidade de carga do acelerômetro =  $3.12 \text{ pC/g} = 0.318 \text{ pC/mseg}^{-2}$ ;
- sensibilidade de voltagem do martelo =  $2.20 \text{ mV/N}$ .

Setenta curvas de resposta em frequência (FRF) foram encontradas. Na figura 6.3 mostra-se o módulo e fase da resposta 13-17, sendo 13 o ponto da resposta e 17 o ponto de excitação, respectivamente.

### 6.1.2 - Identificação dos Parâmetros Modais do Sistema Primário

Os parâmetros modais do sistema primário foram obtidos através das FRFs medidas experimentalmente. Há vários métodos que realizam esta tarefa. A primeira grande divisão que pode ser feita entre eles é:



- identificação no domínio da frequência;
- identificação no domínio do tempo.

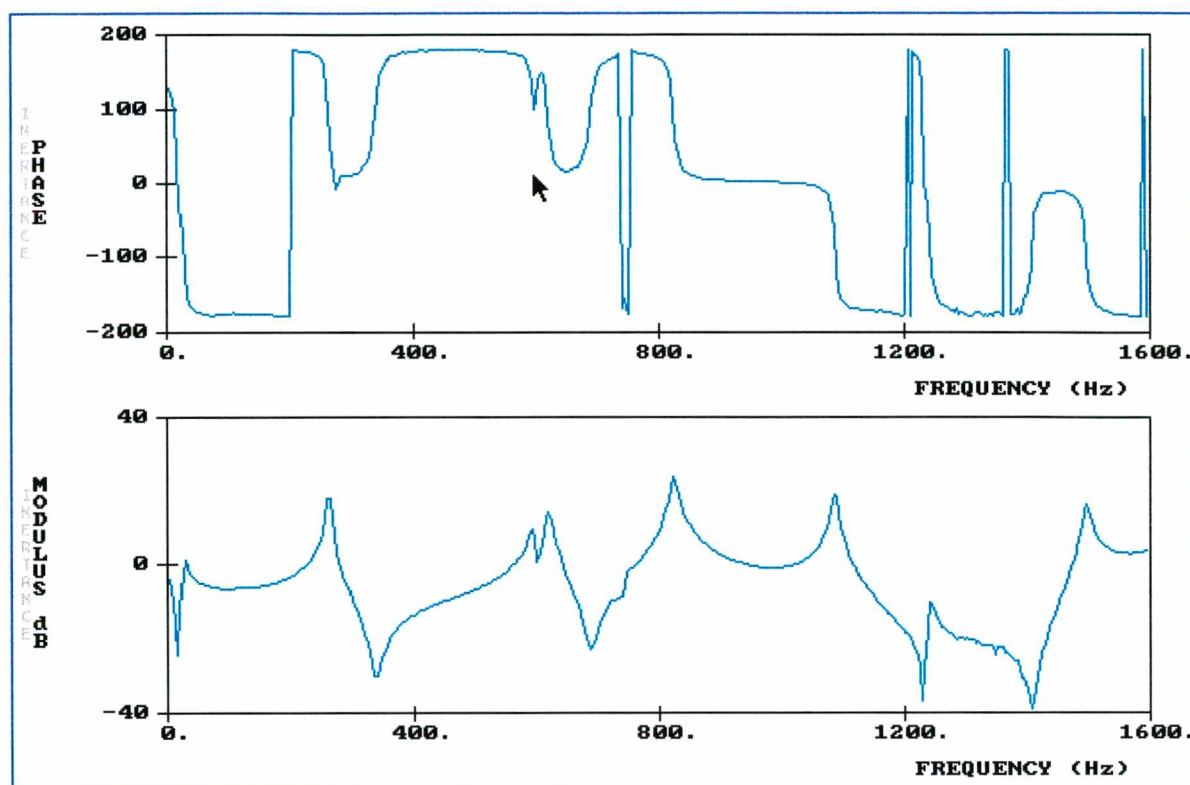


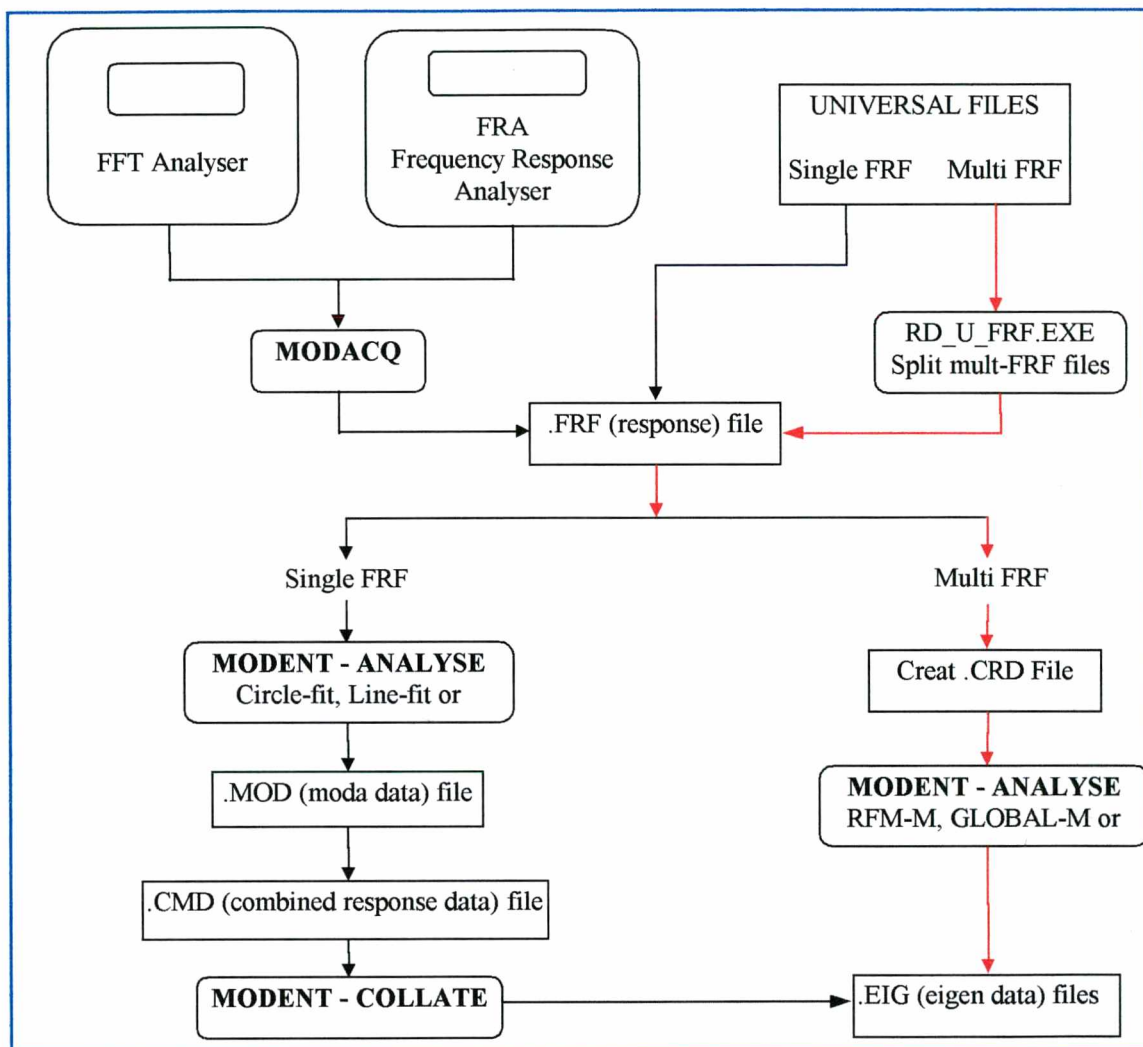
FIGURA 6.3 - Inertância 13-17 do sistema primário.

As vantagens e desvantagens de se trabalhar com uma ou outra técnica têm sido extensamente discutidas em diferentes artigos e publicações, durante várias décadas até o presente. Estas duas grandes escolas têm-se desenvolvido paralelamente, buscando, cada uma, aprimorar os métodos de identificação dos parâmetros de uma estrutura linear qualquer. Algumas destas técnicas, tanto no domínio da frequência quanto no tempo, podem ser encontradas em Brown e Allemang (1979), Bazan e Bavastrì (1995), Juang e Pappa (1985), Juan e Suzuki (1985) entre outros. Existem muitas publicações recentes nesta área em distintas revistas e em congressos, nacionais e internacionais.

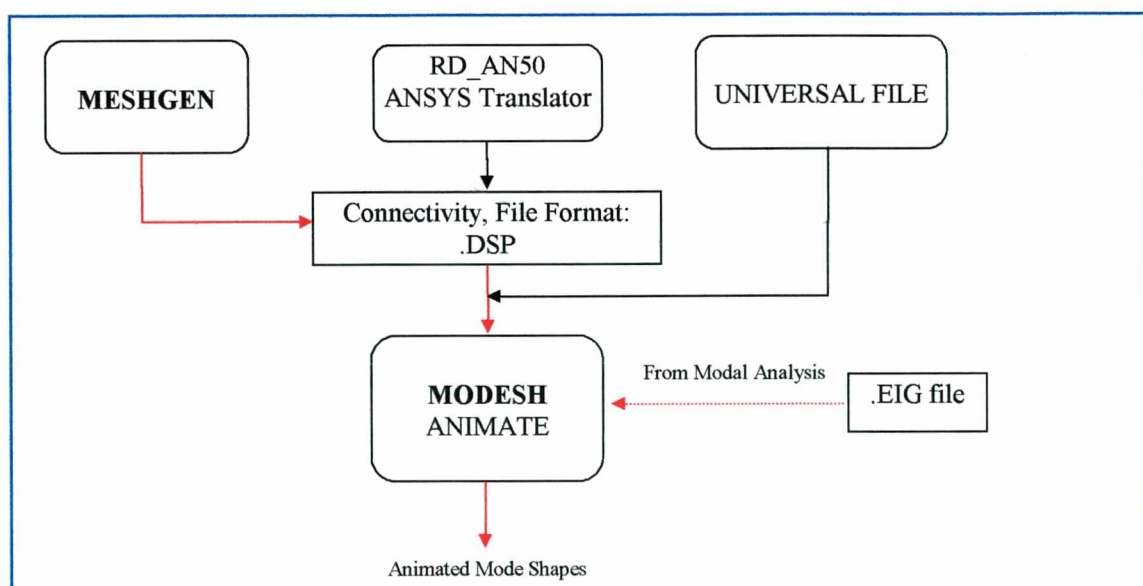
Para determinar as características modais do sistema primário trabalhou-se com um método que enfatiza o domínio da frequência. O “software” adquirido pelo Laboratório de Vibrações e Acústica (PISA - LVA), conhecido como ICATS (“Imperial College Analysis Testing and Software”), foi utilizado para tal fim. Este programa consta de quatro módulos principais:

- MODENT,
- MODESH,
- MODACQ,
- MESHGEN.

Na figura 6.4 apresentam-se os diferentes caminhos que uma FRF pode tomar ao ser processada com o objetivo de extrair seus parâmetros modais, quando levantada em forma experimental. As linhas vermelhas, na figura 6.4, mostram o caminho seguido neste trabalho para a obtenção das características modais da placa de aço.



(a)



(b)

FIGURA 6.4 - a) Análise modal b) Visualização dos resultados.

## Módulo Modent

É um programa de análise modal iterativo que pode ser utilizado para:

- gerar uma FRF a partir dos dados modais de uma estrutura (frequência natural, amortecimento e constante modal) ou a partir de dados espaciais como matrizes de massa, rigidez e amortecimento.
- Análise de uma ou várias FRF para extrair os parâmetros modais.

Neste trabalho, o objetivo foi modelar matematicamente o sistema primário dentro da faixa de frequência de interesse, utilizando a segunda opção. Nesta, podem-se encontrar várias alternativas para a análise modal, sendo duas delas, “Ident” e “Global-M”.

Na primeira, realiza-se uma análise modal para cada FRF particular, de um sistema de múltiplos graus de liberdade (Ewins, 1984). É uma técnica poderosa que realiza uma rápida análise modal para uma dada FRF, sobre uma faixa de frequência. Tem a possibilidade de substituir os modos que se encontram abaixo e acima da faixa de frequência de análise (denominados resíduos), provocando um excelente ajuste dentro da faixa (Ewins, 1984). Uma vez analisadas todas as FRF do sistema, deve-se utilizar a opção “Collate” para criar um consistente conjunto de dados modais. A análise das FRFs, em forma individual, provoca pequenas variações nas frequências naturais. Fixada uma certa tolerância estas pequenas diferenças serão eliminadas, tomando-se assim um valor único.

Na figura 6.5 visualiza-se a tela do programa para esta opção. Esta metodologia de identificação de parâmetros é muito educativa e iterativa entre o “software” e o usuário, permitindo adicionar ou descartar ressonâncias para uma particular FRF.

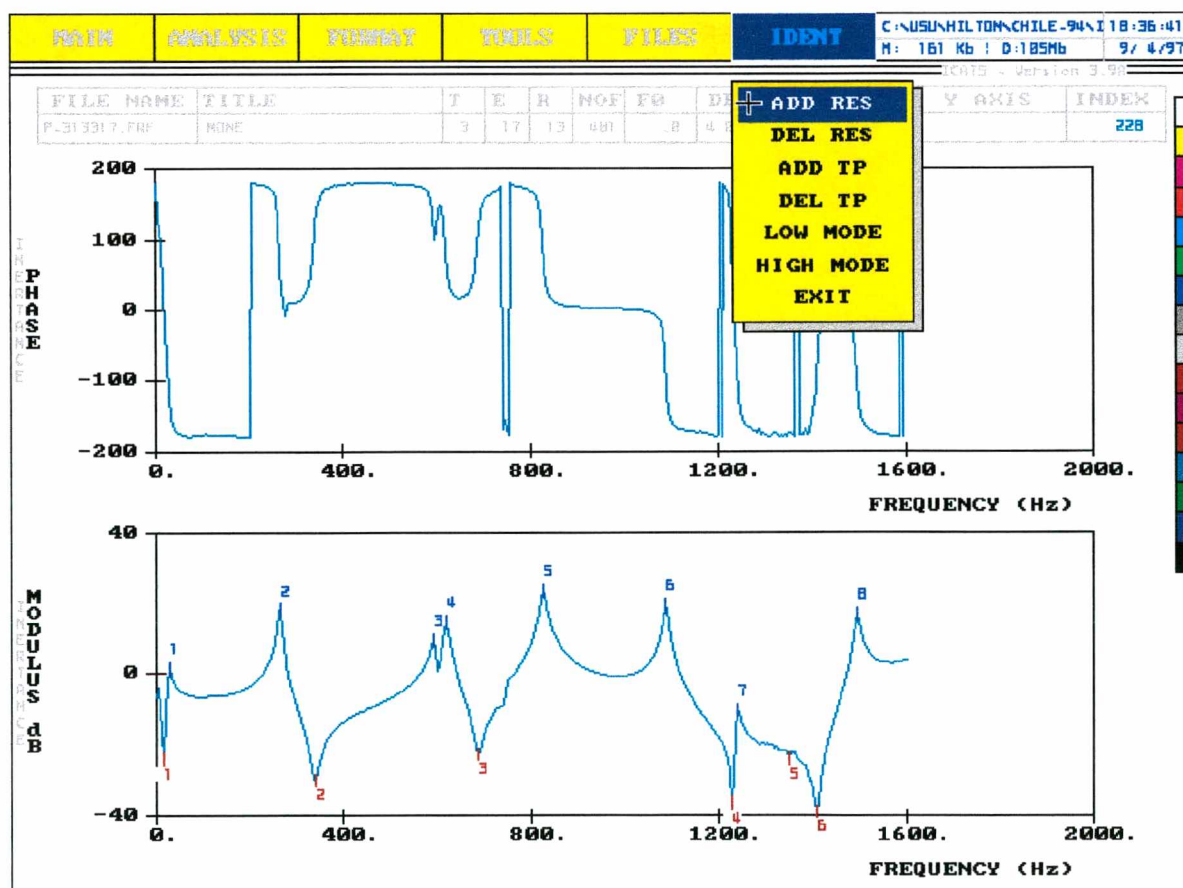


FIGURA 6.5 - Análise modal de uma FRF simples em um sistema de múltiplos graus de liberdade.



Este método é muito usado quando o sistema a ser analisado não possui muitas FRFs ou para obter-se uma boa referência dos parâmetros modais, presentes na faixa de frequência.

Quando a quantidade de FRF medidas é elevada, uma análise global permite agilizar a identificação. O método conhecido como “Global-M” permite uma análise com a totalidade das FRF simultaneamente, com a vantagem de produzir um consistente conjunto de parâmetros modais. Este método foi implementado no presente trabalho. Na figura 6.6 mostra-se o seu formato.

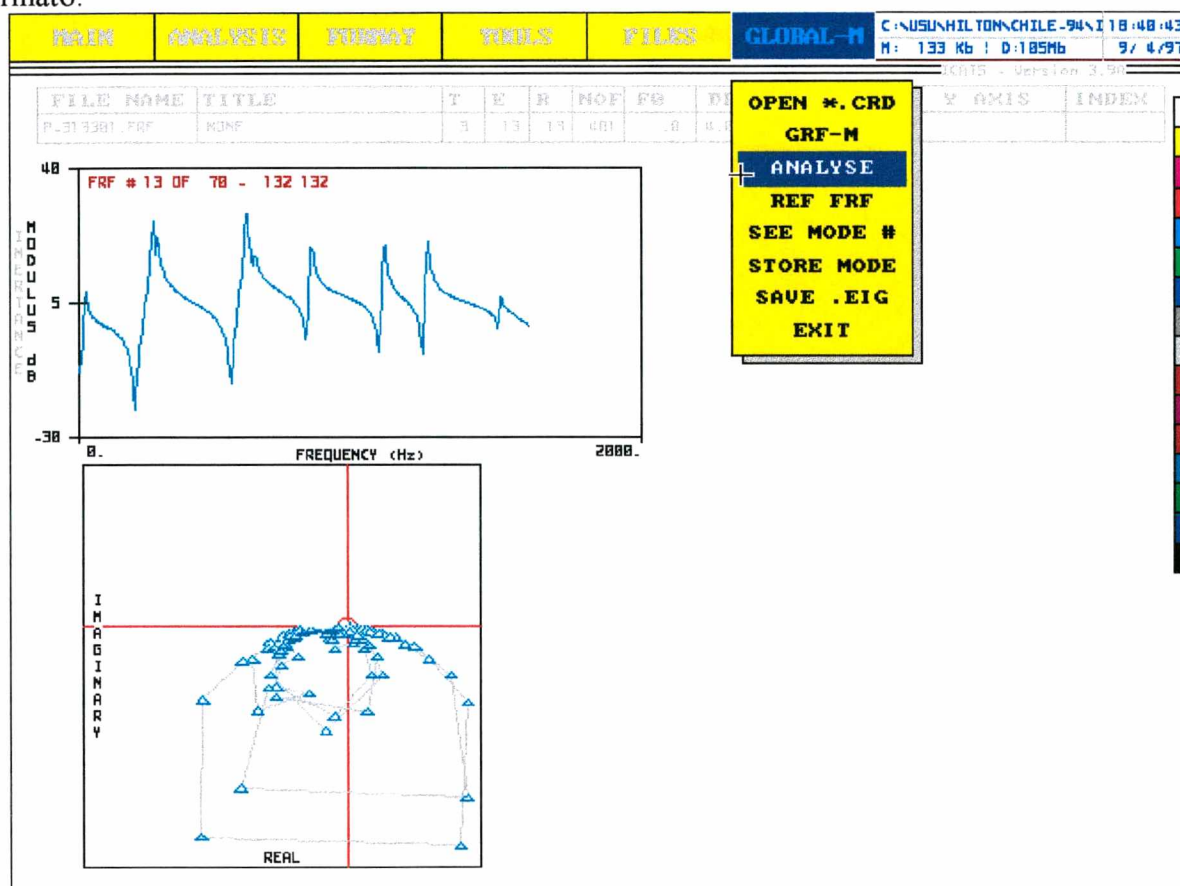


FIGURA 6.6 - Método “Global-M” para análise modal de múltiplas FRF

Primeiramente cria-se um arquivo \*.CRD onde constam o nome das FRFs (70 neste caso particular), segundo ICATS (1995). Para resolver o sistema de equações lineares (Ewins, 1984) utiliza-se decomposição em valores singulares de matrizes complexas. Na saída deste módulo têm-se um arquivo (\*.EIG) contendo os parâmetros modais da estrutura analisada e assim, o modelo matemático desta. No total, foram identificadas 8 frequências naturais de 0 a 1600 Hz. Na figura 6.7 mostram-se 6 dos 8 modos de vibração com suas respectivas frequências naturais e fatores de perda.

### Módulo Meshgen.

Neste módulo encontra-se uma configuração simples, semelhante a qualquer programa de elementos finitos, para construir graficamente o sistema no qual foram medidas as respostas em frequência. A saída do programa é um arquivo \*.DSP, contendo o desenho do modelo em escala do sistema primário. Devem-se respeitar os eixos de referência adotados nas medições, assim como os pontos na discretização.

### Módulo Modacq.

Este serve como interface entre a maioria dos analisadores de Fourier (FFT - medições no domínio do tempo, FRA - medições no domínio da frequência) para construir os arquivos \*.FRF em um determinado formato padrão (ICATS, 1995). O Analisador de Fourier do LVA já converte as respostas em frequência para o formato desejado, não sendo necessário o uso deste módulo.

### Módulo Modesh.

Na figura 6.4 pode-se observar a função deste programa. Tomando os arquivos \*.DSP e \*.EIG, contendo informação da geometria da estrutura e os parâmetros modais extraídos, respectivamente, pode-se visualizar as distintas frequências naturais, fatores de perda e as formas de vibrar associadas a cada modo.

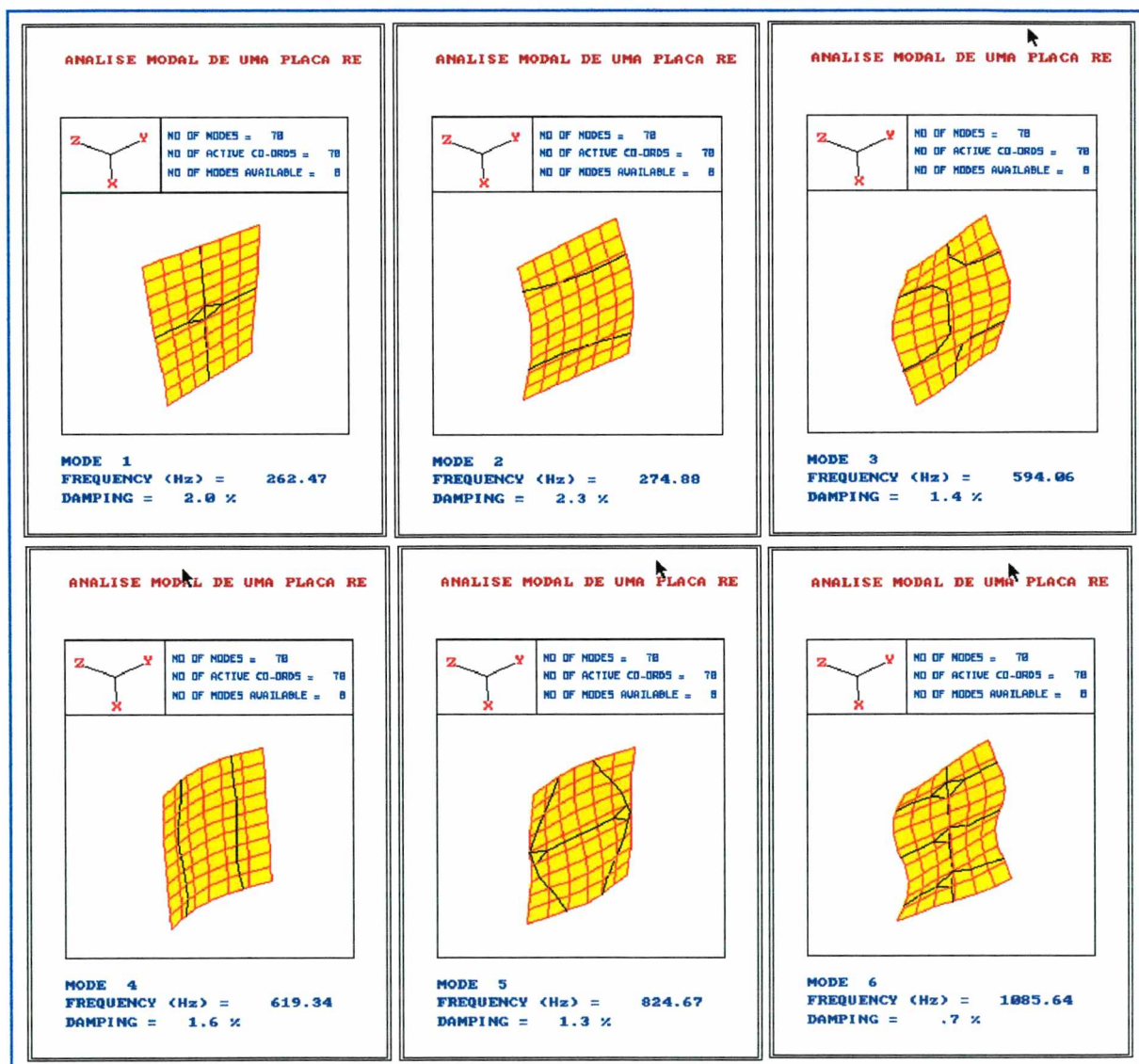


FIGURA 6.7 - Parâmetros modais da placa - 6 primeiros modos.



A figura 6.7 mostra alguns dos parâmetros modais obtidos da placa, suas deflexões máximas e linhas nodais. Esta visualização é importante, uma vez que o conhecimento dos modos de vibrar, correspondentes às frequências naturais dentro da faixa de análise, serve para definir a localização dos neutralizadores na estrutura para reduzir as suas vibrações. Como explicado no capítulo III, o neutralizador trabalha efetivamente quando é excitado na frequência de ressonância. A localização destes em um nó da estrutura primária não produzirá redução alguma, uma vez que o neutralizador não será excitado. A localização destes dispositivos na estrutura primária dependerá, então, da escolha adequada de pontos que possuam grandes amplitudes de vibrações nos modos a controlar (modos que estão na faixa de frequência escolhida para o controle).

O resultado da análise modal, arquivo \*.EIG, contém os parâmetros modais da estrutura. Este arquivo é a base de dados de entrada que o método proposto neste trabalho necessitará para encontrar os neutralizadores ótimos.

O programa comercial ICATS trabalha com modelo histerético (amortecimento estrutural) na extração dos parâmetros modais do sistema primário. Isto deve ser levado em consideração no momento de modelar o sistema primário. O capítulo III apresenta as equações que devem ser utilizadas para tal fim. **O método de identificação utilizado neste trabalho garante que os autovetores são ortonormalizados através da matriz massa do sistema primário. Isto é fundamental para aplicar os conceitos vertidos até aqui. É importante que se considere este fato para futuros trabalhos. Na escolha, entre as diferentes técnicas para o cálculo dos parâmetros modais de um sistema linear qualquer, o modelo matemático utilizado deve garantir que a massa modal seja unitária ou a rigidez modal igual à frequência natural não amortecida ao quadrado.**

## 6.2 - Cálculo dos Neutralizadores Dinâmicos Atuando em Banda Larga

Os passos seguidos neste item são os mesmos que na simulação numérica do capítulo V, quando realizado o controle de uma viga engastada livre em uma faixa de frequência. Pequenas diferenças serão apresentadas em relação ao modelo matemático utilizado para o sistema primário e o neutralizador dinâmico.

### 6.2.1 - Variável de Projeto e Função Objetivo.

De forma geral, o modelo do neutralizador utilizado a partir daqui será o viscoelástico. As variáveis de projeto são dadas pelas equações (5.1.2.1) e (5.1.2.2). A primeira das expressões do parágrafo anterior (5.1.2.1) considera os neutralizadores com materiais viscoelásticos distintos e é utilizada com objetivos teóricos. A segunda (5.1.2.2) considera todos os neutralizadores com materiais iguais, dando um sentido mais prático. Esta última foi utilizada na escolha dos parâmetros ótimos dos neutralizadores.

A função objetivo que será utilizada para o controle de vibrações de uma estrutura, contendo vários modos na faixa de análise, foi apresentada na equação (5.2.3). Como explicado nessa oportunidade, a utilização desta função, permite trabalhar com técnicas de otimização que se baseiam na informação da primeira derivada.

### 6.2.2 - Método de Programação Não Linear.

O método de otimização não linear utilizado foi o Quase - Newton. Este método, além de dar excelentes resultados, reduz o tempo computacional se comparado com técnicas que não utilizam informação de derivadas de primeira ordem. Isto favorece na implementação da metodologia proposta neste trabalho, onde o simples fato de chamar a função objetivo produz um esforço computacional elevado. É conveniente lembrar que o valor da função objetivo precisa do conhecimento das coordenadas principais em toda a faixa de frequência de análise.

### 6.2.3 - Localização dos Neutralizadores.

Escolhe-se, para a redução de vibrações da placa (figura 6.1), uma faixa de frequência entre 400 e 700 [Hz]. Nesta, encontram-se o terceiro e quarto modo, com uma frequência natural de 594.0643 e 619.3386 [Hz]. De forma geral, os neutralizadores devem ser fixados nos pontos de máxima deformação destes modos, como explicado no item 6.1.2. Neste caso particular, os pontos escolhidos para fixar os dispositivos secundários foram os vértices da estrutura. Estes pontos poderiam ser escolhidos para neutralizar quaisquer modos em qualquer faixa de frequência. Para uma placa livre é de se esperar que os seus vértices não formam nó para modo algum. Cabe salientar que a escolha desses pontos poderia ser outra, sempre que os modos a controlar não contenham pontos de vibração nulos. Na figura 6.7 pode-se observar que os pontos correspondentes à parte central da placa, em direção às bordas, poderiam servir de alternativa para pontos de fixação dos neutralizadores, visando o controle nesta faixa de frequência.

### 6.2.4 - Dados Adicionais.

Além das características modais do sistema primário, é necessário estabelecer certos dados adicionais no processo de otimização. São estes :

- número de neutralizadores = 4;
- localização dos mesmos na estrutura = [1 7 64 70];
- faixa de frequência de análise [Hz] = [400 700];
- número de modos na faixa de frequência de análise = 2;
- identificação numérica destes modos = [3 4];
- número de discretizações escolhidas na faixa = 200;
- número de frequências naturais e modos computados para análise  $\hat{n} = 5$ ;
- faixa de frequência para observação dos resultados = [100 1600];
- ponto de referência da excitação = 1;
- restrições de desigualdade, para todas as componentes do vetor  $x$ , tomou-se = [1 10000];
- relação de massas (todas iguais) = 0.1;
- ponto inicial de busca  $x_0 = [500 \ 500 \ 500 \ 500 \ 500]$ ;



### 6.2.5 - Resultado Teórico 1

Na figura 6.8, o gráfico mostra a resposta em frequência 1-1 do sistema primário e do sistema composto com neutralizador ótimo. Na figura 6.8a os 5 (cinco) primeiros parâmetros modais foram utilizados para a obtenção dos neutralizadores ótimos e, na figura 6.8b, o número de modos utilizados foi 8 (total de modos computados). Em ambos casos utilizaram-se os oito modos para a visualização dos resultados. Pode-se observar, por simples inspeção, que os gráficos praticamente não diferem, uma vez que, no espaço modal, o sistema composto encontra-se acoplado apenas pelos neutralizadores dinâmicos. Observa-se, também, uma redução na faixa de frequência de análise de 30 [dB] aproximadamente.

A tabela 6.1 apresenta o ponto ótimo obtido no processo de programação não linear acima.

TABELA 6.1 - Parâmetros ótimos dos neutralizadores

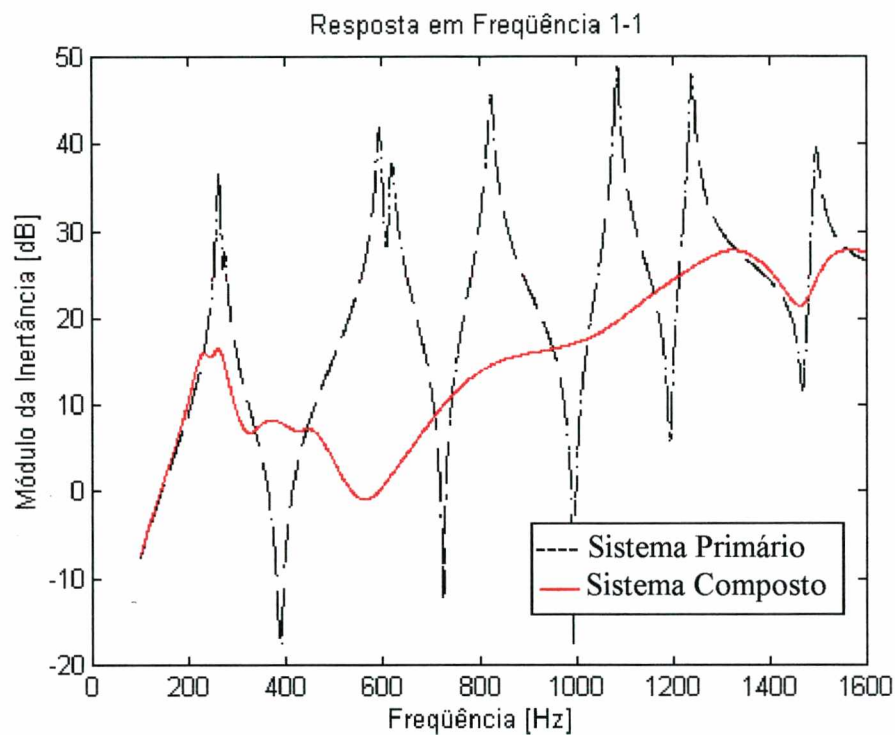
Parâmetros Ótimos dos Neutralizadores	5 primeiros parâmetros modais	8 primeiros parâmetros modais
$f_{a_1}$ [Hz]	555.4	558.64
$f_{a_2}$ [Hz]	444.56	459.67
$f_{a_3}$ [Hz]	579.21	584.92
$f_{a_4}$ [Hz]	449.66	453.46
$\eta_a$	0.2182	0.2018
$m_a$ [Kg]	0.021372	0.021372

Nas figuras 6.9a e 6.9b apresentam-se duas respostas em frequência, escolhidas arbitrariamente na placa (sistema primário) com e sem neutralizadores ótimos, respectivamente. Como pode-se constatar nestas figuras, o controle é total sobre o sistema primário, obtendo-se um bom desempenho na faixa de frequência escolhida e um efeito benéfico fora da mesma, produto do acoplamento real do sistema.

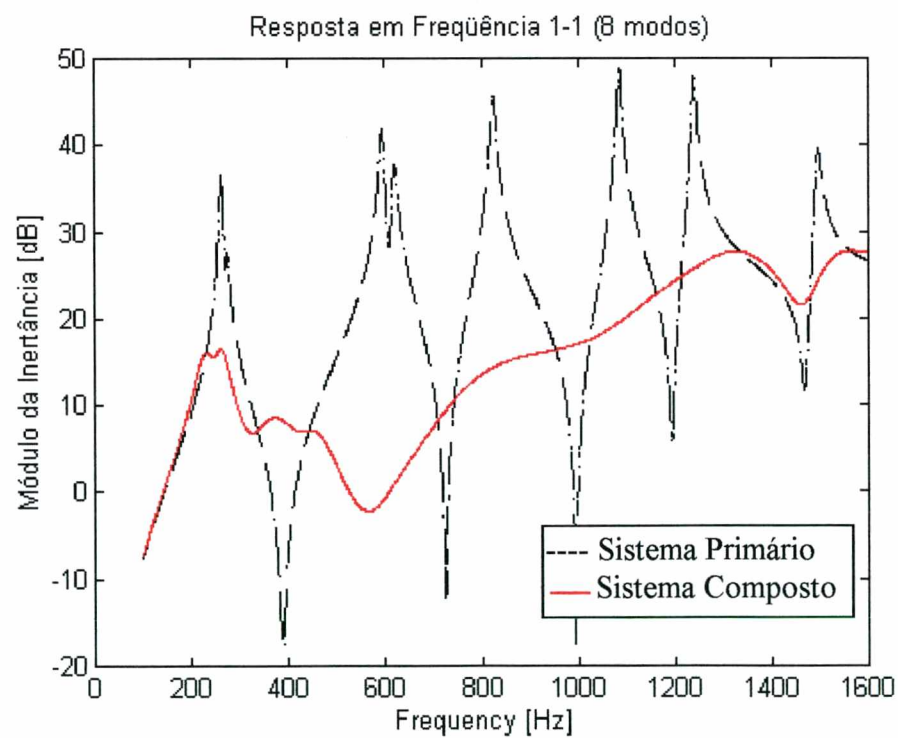
Os resultados obtidos são puramente numéricos. A partir daqui, podem-se seguir os passos mostrados no capítulo V para a seleção do material viscoelástico e, posteriormente, a construção dos neutralizadores.

### 6.2.6 - Resultado Teórico 2

Devido à existência de um material viscoelástico (DYAD 601), no laboratório de Vibrações e Acústica, optou-se pela escolha deste para a construção dos neutralizadores. A decisão foi influenciada pelo conhecimento de suas características (Anexo 3), dando maior confiança ao realizar a correlação entre os resultados teóricos e experimentais. Como observado naquele anexo, a faixa de frequência analisada ([400 700] Hz) encontra-se na região de transição, respeitando a simplificação feita no capítulo III (material viscoelástico Tipo II). Assim, considerou-se o fator de perda constante igual a 0.6 e o módulo e cisalhamento proporcional a frequência. Com essas características do material viscoelástico, uma nova análise foi realizada. Os dados de entrada adicionais foram os mesmos do item anterior.



(a)



(b)

FIGURA 6.8 - a) Módulo da FRF 1-1 c/5 modos b) módulo da FRF 1-1 c/8 modos

Com o fator de perda conhecido, as variáveis no processo de otimização são reduzidas a quatro (4, frequências naturais dos neutralizadores). A figura 6.10 mostra a resposta em frequência 13-13 e 13-58, utilizando-se os cinco (5) primeiros modos.

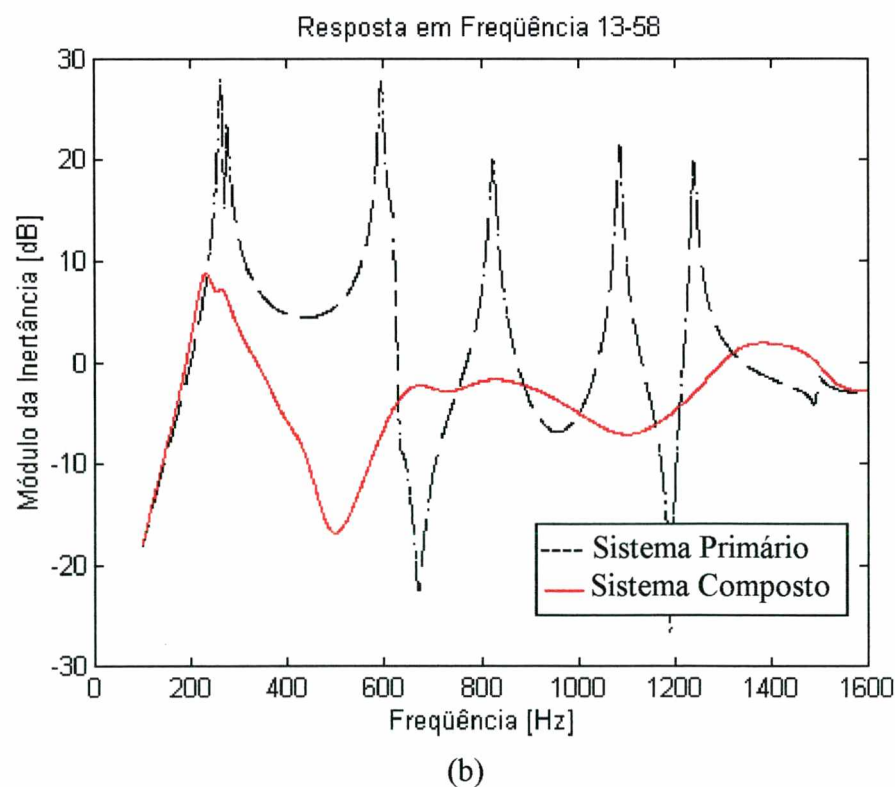
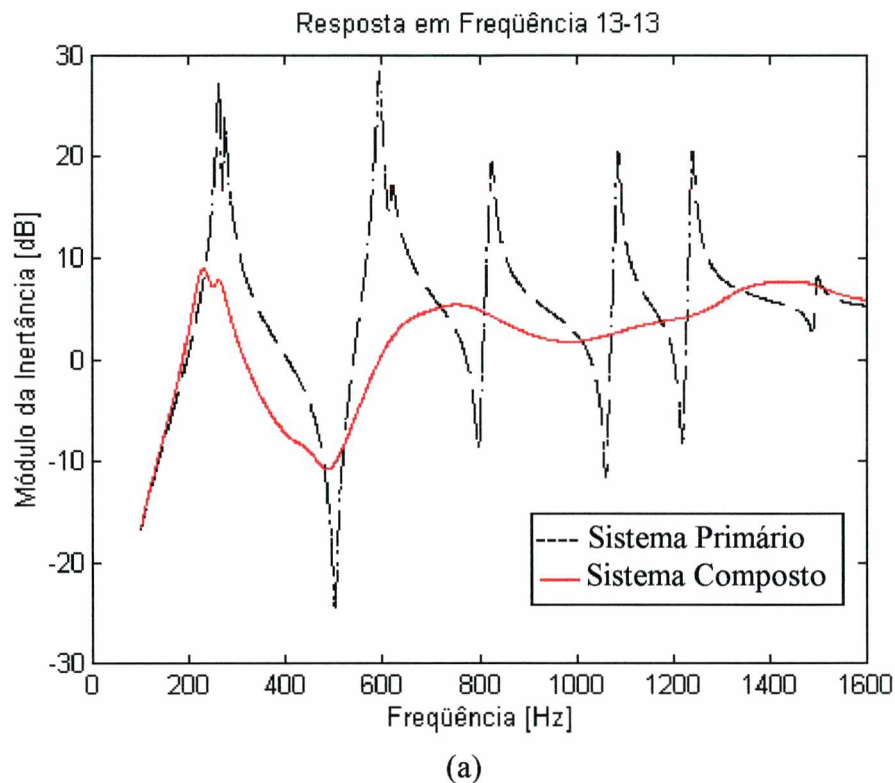
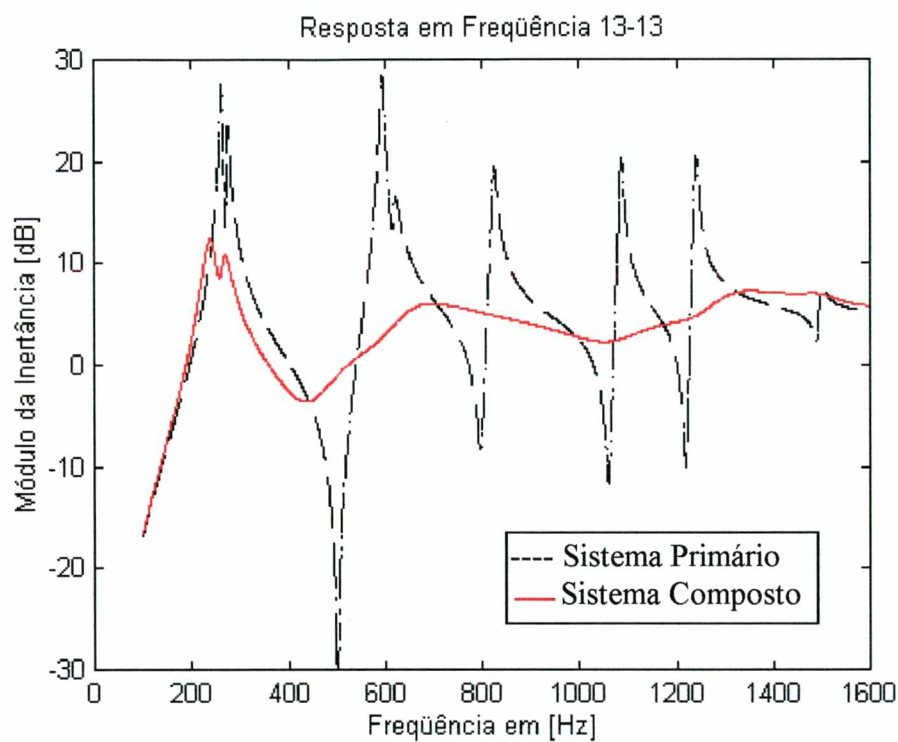
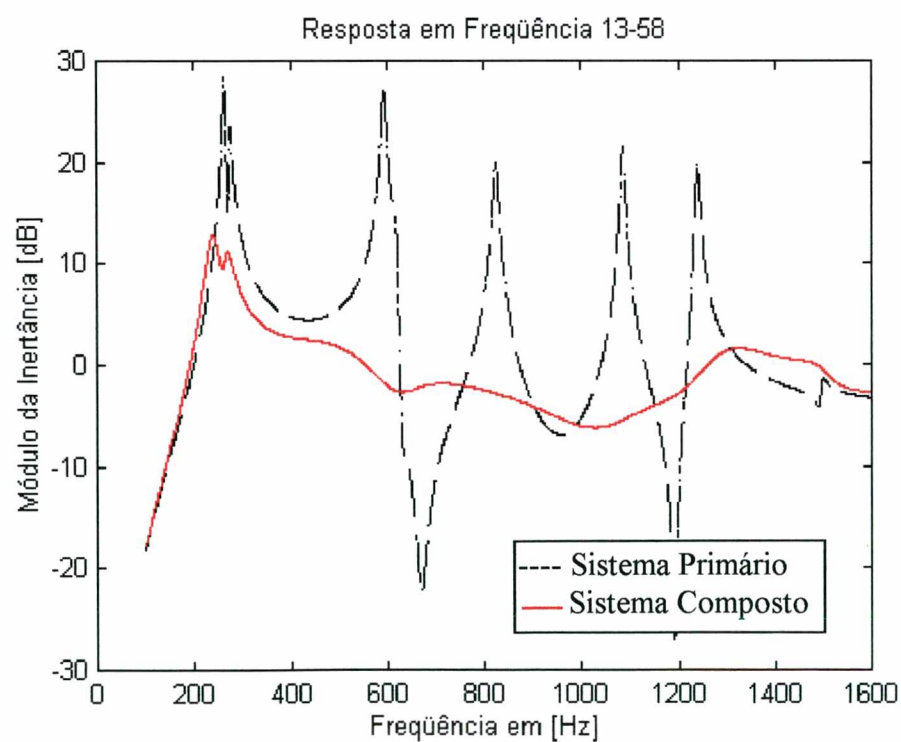


FIGURA 6.9 - Inertância do sistema primário e composto a) 13-13 b) 13-58



(a)



(b)

FIGURA 6.10 - a) Módulo da FRF 13-13 b) módulo da FRF 13-58



Na tabela 6.2 observam-se os valores dos parâmetros ótimos, resultado numérico para o novo problema (figura 6.10), sendo o fator de perda constante e igual a 0.6.

TABELA 6.2 - Parâmetros ótimos considerando fator de perda constante (0.6)

Parâmetros Ótimos dos Neutralizadores	5 primeiros parâmetros modais
$f_{a_1} [Hz]$	510.96
$f_{a_2} [Hz]$	397.227
$f_{a_3} [Hz]$	513.29
$f_{a_4} [Hz]$	468.47
$\eta_a$	0.6
$m_a [Kg]$	0.021372

Estes resultados, além de serem provenientes de uma simulação numérica, continuam trabalhando com a simplificação do fator de perda constante e do módulo de cisalhamento proporcional à frequência, na região de transição.

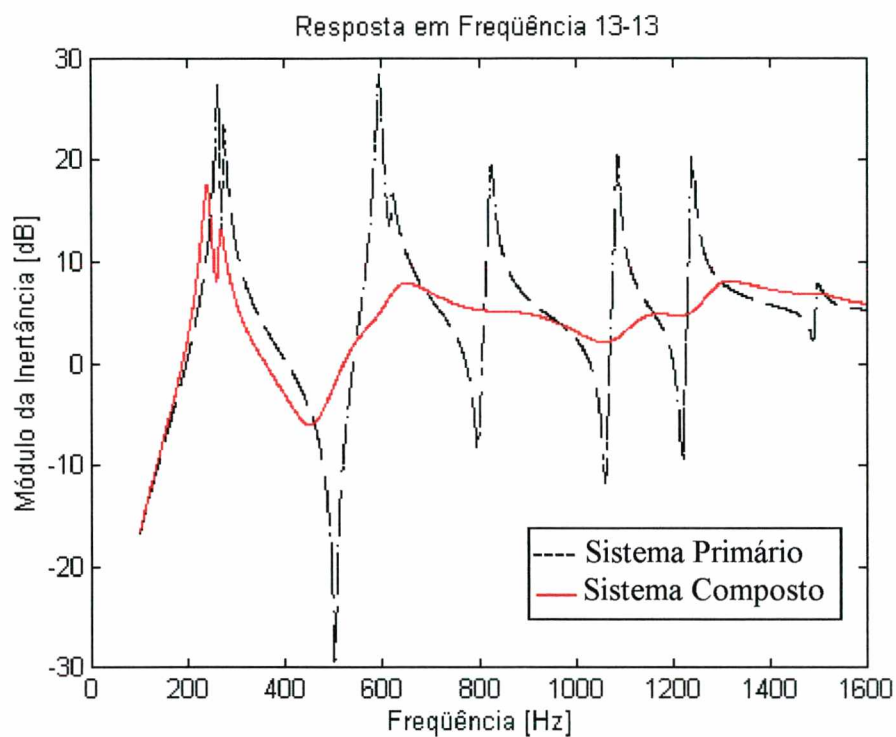
### 6.2.7 - Resultado Teórico 3

Para mostrar a validade da simplificação do item anterior e conhecendo-se as características do material viscoelástico DYAD 601, uma nova análise foi realizada. Mantendo-se a estrutura dos itens anteriores e os dados de entrada introduz-se, no programa de otimização, as curvas do fator de perda e módulo de cisalhamento encontradas no Anexo 3. A figura 6.11 mostra as respostas em frequências 13-13 e 13-58 para esta nova análise.

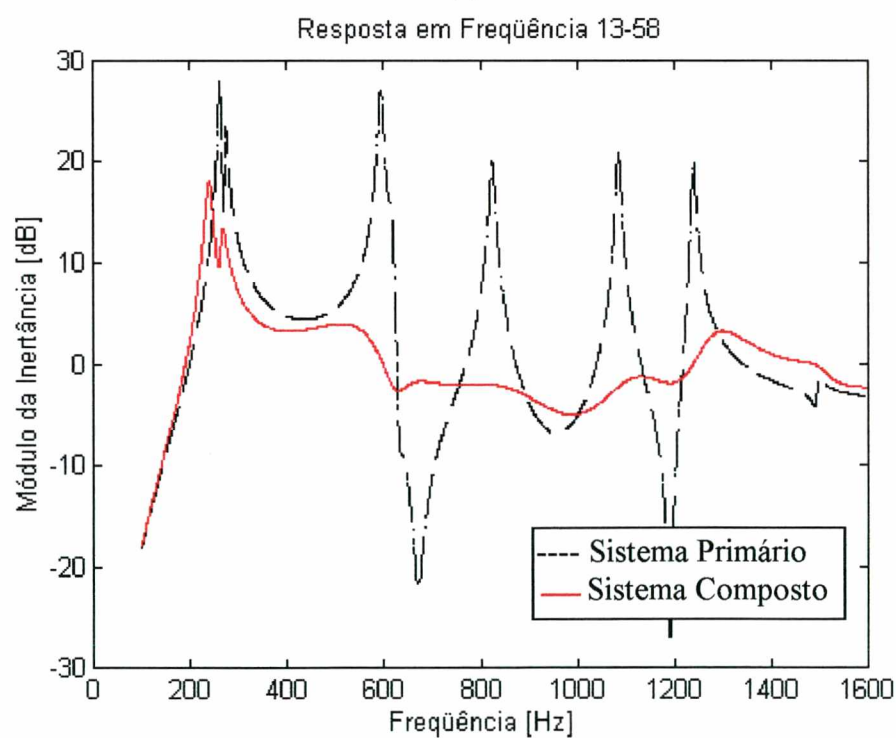
A tabela 6.3 mostra o resultado do ponto ótimo e os parâmetros dos neutralizadores, produto da otimização do sistema mostrado na figura 6.1, cujos dados coincidem com os dados do item anterior.

TABELA 6.3 - Parâmetros ótimos dos neutralizadores dinâmicos com material viscoelástico conhecido.

Parâmetros Ótimos dos Neutralizadores	5 primeiros parâmetros modais
$f_{a_1} [Hz]$	510.66
$f_{a_2} [Hz]$	406.86
$f_{a_3} [Hz]$	515.4
$f_{a_4} [Hz]$	473.24
$\eta_a$	$\cong 0.6$
$m_a [Kg]$	0.021372



(a)



(b)

FIGURA 6.11 - a) Módulo da FRF 13-13 b) módulo da FRF 13-58

Pode-se observar, comparando os itens 6.2.6 e 6.2.7, a semelhança dos resultados, tanto na resposta do sistema composto (sistema primário + neutralizador ótimo) quanto nos parâmetros



ótimos. Nestes, o erro entre as otimizações é, para a máxima dispersão, de 2.3 %. Isto significa que o conhecimento do fator de perda, para um determinado material viscoelástico na região de transição, permite realizar os cálculos com uma elevada precisão. Na atualidade, os fabricantes provêm as características dos materiais viscoelásticos em nomogramas, como no Anexo 3. O que possibilitaria trabalhar com estes valores sem cometer grandes erros. Ainda assim, o levantamento das características desses materiais é importante de ser realizado em laboratório para comprovar as curvas dadas pelo fabricante, como também projetar no futuro materiais com similares características ou melhores.

### 6.3 - Ensaio Experimental.

Para corroborar os resultados obtidos numericamente nos itens 6.2.6 e 6.2.7, realizou-se uma medição experimental do sistema composto (estrutura + neutralizadores ótimos). Para isto, a construção dos neutralizadores e a sua fixação no sistema primário tiveram de ser realizadas.

#### 6.3.1 - Construção dos Neutralizadores.

Com os parâmetros ótimos mostrados na tabela 6.2 ou 6.3, pode-se construir os neutralizadores dinâmicos e, assim, realizar a parte experimental, que será comparada com os resultados numéricos do item 6.2.7. No capítulo V apresentaram-se os passos necessários para a escolha do material viscoelástico, uma vez conhecidos esses parâmetros.

Neste trabalho o material viscoelástico, pelas razões já mencionadas, foi escolhido arbitrariamente e, assim, estes passos não serão seguidos. Por razões práticas, a faixa de frequência de análise foi mantida entre 400 a 700 [Hz]. Esta faixa poderia ter sido alterada para que o material trabalhasse no ponto extremo da curva do fator de perda (ponto de inflexão do módulo de cisalhamento), para ser coerente com o capítulo V na escolha do material viscoelástico. A razão pela qual isto não foi feito justifica-se pela tentativa de supor um caso real, onde a faixa de frequência é estabelecida pelas excitações, utilizando características de material conhecidas e em existência. Assim sendo, a construção do neutralizador orienta-se pelos seguintes passos:

- Partindo dos parâmetros ótimos calcula-se o fator de forma para cada neutralizador ( $L$ ). Como foi visto no capítulo V este dependerá do tipo de excitação a que estará sendo submetido o material viscoelástico e da forma do neutralizador. Os dados de entrada são:

$$x^* = \begin{Bmatrix} 510.66 \\ 406.86 \\ 515.4 \\ 473.24 \end{Bmatrix} [Hz],$$

- A massa dos neutralizadores, consideradas todas iguais, e o fator de perda são :

$$m_a^* = 2.1372 \cdot 10^{-2} [Kg]$$

$$\eta_a^* \cong 0.6 .$$

- Com a frequência de ressonância, considerando uma temperatura de trabalho de 20 graus Celsius, encontram-se os valores do módulo de cisalhamento com auxílio das curvas características do material viscoelástico (Anexo 3). Estes valores são:

$$G(\Omega_a) = \begin{Bmatrix} 1.1372 \\ 0.94094 \\ 1.1437 \\ 1.0629 \end{Bmatrix} 10^7 [N / m^2].$$

- Como viu-se no capítulo II, a rigidez pode ser escrita na forma geral:

$$K(\Omega_a) = L G(\Omega_a)$$

onde  $L = A / h$ , para o caso de cisalhamento puro, sendo  $A$  e  $h$  área e a espessura de cisalhamento, respectivamente. A frequência de antirressonância (ressonância) é:

$$\Omega_{a_i}^2 = \frac{K(\Omega_{a_i})}{m_{a_i}} = \frac{L G(\Omega_{a_i})}{m_{a_i}}.$$

- Considerando a massa dos neutralizadores iguais e conhecendo as frequências de antirressonância e módulo de cisalhamento, pode-se obter o fator de forma  $L$  para cada neutralizador. Assim, têm-se:

$$L = \begin{Bmatrix} 0.0774 \\ 0.05936 \\ 0.0784 \\ 0.0712 \end{Bmatrix} [m].$$

- A espessura do material viscoelástico  $h$  é igual a  $0.0005 \text{ m}$ . Juntamente com o fator de forma pode-se calcular a área de cisalhamento, necessária para reproduzir as características dos neutralizadores na redução de vibrações da placa em questão (frequências naturais dos neutralizadores).

Desta forma, a área fica definida por:

$$A = L h = \begin{Bmatrix} 3.8695 \cdot 10^{-5} \\ 2.9686 \cdot 10^{-5} \\ 3.9193 \cdot 10^{-5} \\ 3.5555 \cdot 10^{-5} \end{Bmatrix} [m^2].$$

Isto representaria uma área aproximada de  $0.4 [cm^2]$  para os neutralizadores e, portanto, um diâmetro de  $0.1 [cm]$  se a altura é considerada  $1 [cm]$  (a unidade  $cm$  é utilizada aqui para ter sentimento de grandezas apenas). A construção em forma manual de um dispositivo tão pequeno

é trabalhosa e pouco prática. Desta forma, o aumento da área  $A$ , mantendo a frequência de ressonância dos neutralizadores, é uma tarefa necessária a ser realizada.

Isto pode ser feito colocando as fitas de material viscoelástico em série, resultando uma rigidez equivalente da forma:

$$K_T = \frac{1}{1/K + 1/K + \dots + 1/K} = \frac{K}{n_G},$$

sendo  $n_G$  o número de fitas em série. Pode-se demonstrar matematicamente que se  $n_G = 4$  o fator de forma do sistema com as fitas em série será quatro (4) vezes menor ao se comparar ao construído com uma fita apenas:

$$K_T = K/4 = L' G$$

$$K = L G,$$

assim,  $L' = L/n_G$ . Por outro lado deve-se manter o valor de  $L$  para manter a frequência de ressonância necessária. Como a espessura do material viscoelástico foi incrementada quatro (4) vezes, a área ficará dada pela seguinte relação:

$$L'' = 4L' = L$$

$$A'/h' = A/h$$

$$\text{como } h' = 4h \Rightarrow A' = 4A$$

numericamente

$$A' = 4 A = \begin{Bmatrix} 1.5478 \\ 1.1874 \\ 1.5677 \\ 1.4222 \end{Bmatrix} 10^{-4} [m^2].$$

A forma do neutralizador é apresentada na figura 6.12. Consiste de um núcleo de alumínio, que serve como base para a fixação do neutralizador à estrutura primária e ao material viscoelástico. O material viscoelástico une o núcleo de alumínio (de massa desprezível) a um anel de aço, que representa a massa do neutralizador  $m_a$ . Ao vibrar, o neutralizador produz um deslocamento relativo entre o núcleo e a massa, produzindo uma rigidez dinâmica, função da frequência de excitação. Na temperatura ambiente (20 graus Celsius), a frequência natural do neutralizador deve estar próxima à frequência de antirressonância (ponto ótimo no processo de otimização). O neutralizador trabalha ao cisalhamento puro neste tipo simples de construção. O projeto do neutralizador, em relação ao material viscoelástico, foi de forma tal que a dissipação de calor produzida no seu interior seja a máxima possível. Este é um ponto importante, uma vez que um aumento da temperatura modifica as características do material viscoelástico, em maior ou menor medida, como será discutido oportunamente.



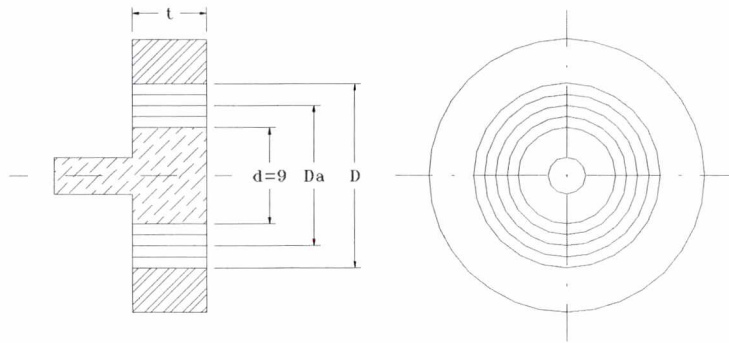


FIGURA 6.12 - Anteprojeto do neutralizador dinâmico.

Da figura anterior, partindo do diâmetro do núcleo igual a 9 [mm], calcula-se a área de cisalhamento. Considerando quatro (4) fitas deste material, o diâmetro médio correspondente a esta área é:

$$D_a = d + 4 \cdot 0.0005 = 0.01124 \text{ [m]}$$

e a área de cisalhamento, considerando todo o material sem espaços livres, será :

$$A_T = \pi D_a t = 3.53115 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

Para conseguir a frequência natural desejada, uma vez fixada a espessura e o material viscoelástico, é necessário reproduzir a área requerida  $A'$ . Esta é obtida eliminando material de  $A_T$ . O motivo fundamental deste passo é construir os neutralizadores de forma tal que, em funcionamento, dissipem a maior quantidade de calor. Assim, a área a extrair é:

$$A_{\text{extrair}} = A_T - A' = \begin{Bmatrix} 1.9833 \\ 2.3436 \\ 1.9634 \\ 2.1089 \end{Bmatrix} 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}.$$

Em percentagem, com relação à área total de cisalhamento, a área necessária a extrair para cada neutralizador é:

$$A_{\text{extrair}} = \begin{Bmatrix} 56.16 \\ 66.37 \\ 55.60 \\ 59.72 \end{Bmatrix} [\%].$$

### Dimensão do Anel Externo:

Com a massa dos neutralizadores e o tipo de material utilizado, encontram-se as dimensões do anel externo. Com:

$$m_a = 2.1372 \cdot 10^{-2} \text{ [Kg]} \text{ (massa do neutralizador),}$$

$$\rho = 7700 \text{ [Kg / m}^3\text{]} \text{ (densidade do aço),}$$

$$t = 0.01 \text{ [m]} \text{ (comprimento do anel),}$$

$$D = 0.01348 \text{ [m]} \text{ (diâmetro interior do anel que proporciona a massa do neutralizador),}$$

o diâmetro exterior pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$D_2 = \sqrt{4 \left( \frac{m_a / \rho}{\pi t} + \frac{D^2}{4} \right)} = 0.02313 \text{ [m]}.$$

Com estes parâmetros podem-se construir os neutralizadores, que terão uma frequência de antirressonância coincidente com o ponto ótimo obtido no programa de otimização não linear. A construção de cada um destes neutralizadores foi realizada de forma artesanal. Para isto, construíram-se os anéis externos de aço (proporcionando a massa dos neutralizadores) e os núcleos de alumínio de mesmo tamanho. O anel possui as dimensões mostradas acima. O núcleo de alumínio tem um ressalto, como pode ser visto na figura 6.12, com objetivo de fixá-lo na estrutura primária. Os diâmetros do núcleo são 0.009 e 0.0045 [m]. O material viscoelástico, disponível em fitas de 0.0005 [m], foi colado ao redor do núcleo em quatro passadas. Isto provocou a disposição do material em série. Utilizou-se, para isto, Araldite 24 horas, acelerando a cura com calor. Uma vez a cola seca, procede-se ao corte do material viscoelástico, extraindo a quantidade antes mencionada, para produzir a frequência natural desejada. Novamente, efetua-se a colagem do anel exterior com o material viscoelástico acelerando a cura com calor. Isto feito, estão prontos os neutralizadores ótimos para trabalhar na faixa de frequência de interesse. Na figura 6.13 pode-se observar a sua forma final.

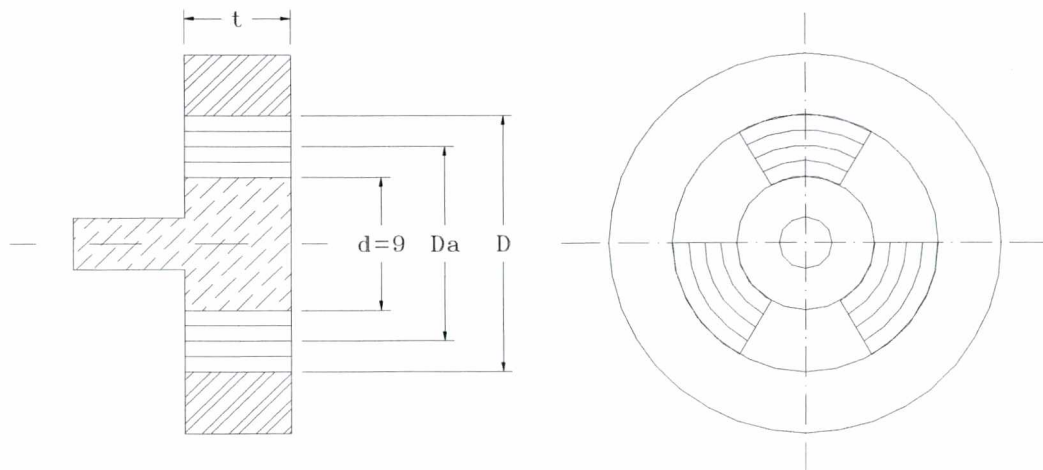


FIGURA 6.13 - Forma final do neutralizador dinâmico

A resposta dos neutralizadores foi obtida, experimentalmente, medindo-se a transmissibilidade através dos dispositivos na figura 6.14. Utilizou-se, para este ensaio, um acelerômetro Brüel & Kjær, tipo 4375 e um transdutor magnético, tipo MM 0002. A excitação, realizada através de um excitador tipo 4809, foi um sinal “swept sine” de 0 a 1600 [Hz].

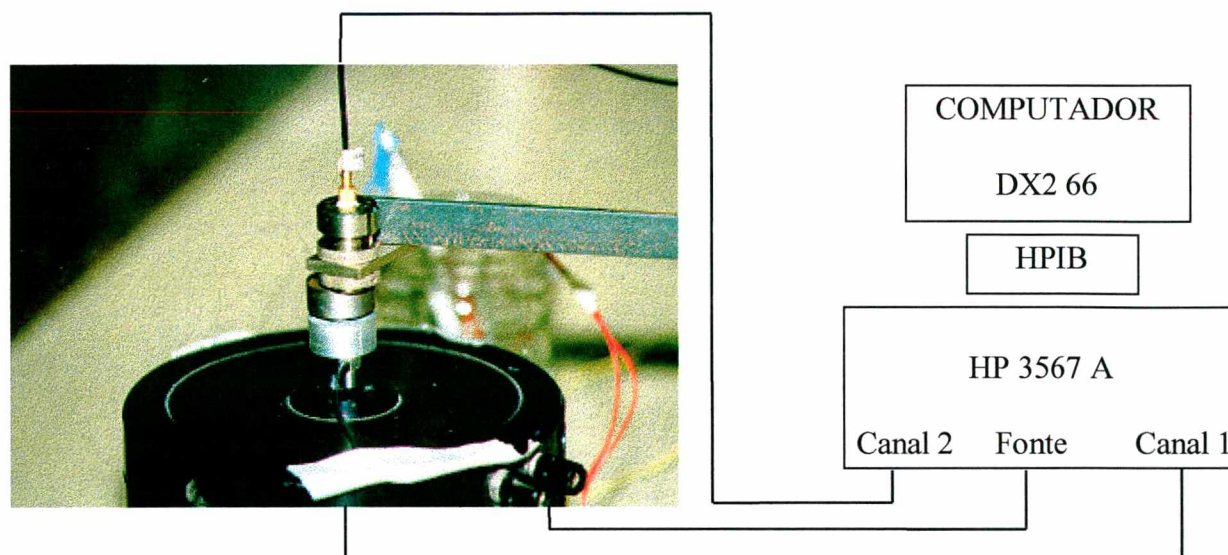


FIGURA 6.14 - Esquema de medição da transmissibilidade de um neutralizador

As respostas dos quatro neutralizadores podem ser visualizadas nas figuras 6.15 e 6.16. Nestes gráficos observam-se as relações de respostas entre a base e a massa dos neutralizadores simples. A transmissibilidade é dada pelas curvas superiores de cada um deles (módulo da relação de respostas).

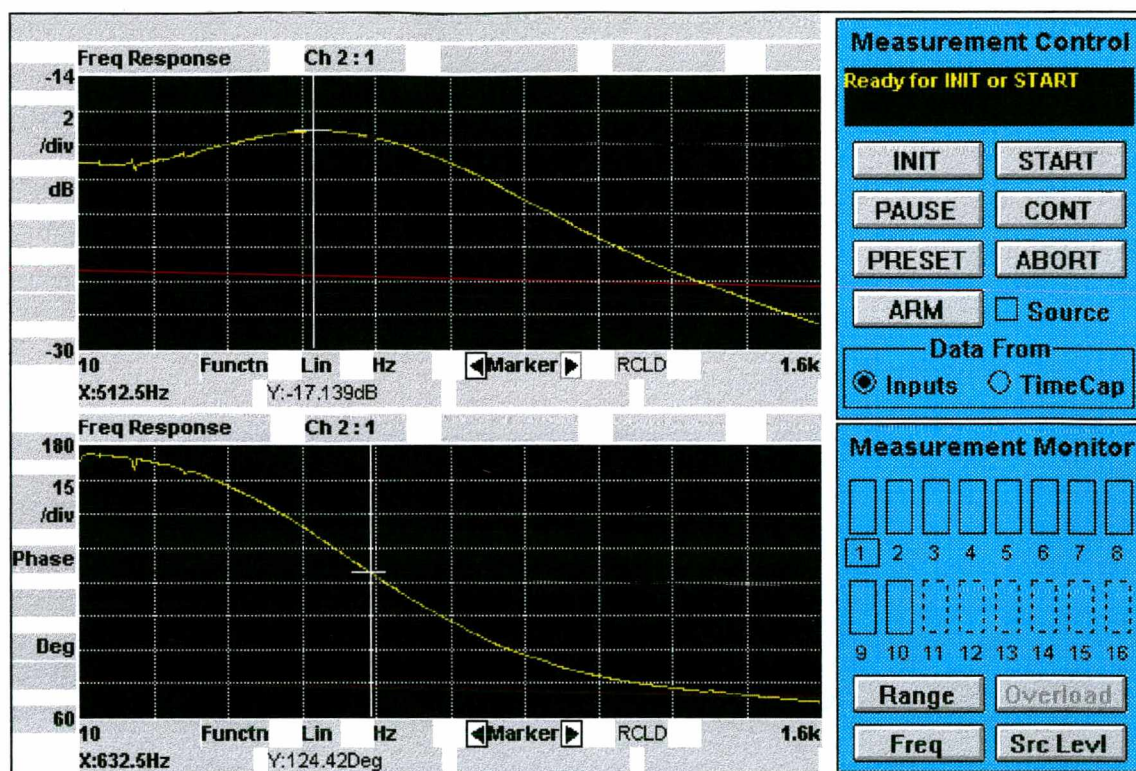
Na tabela 6.4 observam-se as frequências naturais obtidas no processo numérico e as frequências naturais dos neutralizadores medidas experimentalmente.

TABELA 6.4 - Frequências naturais dos neutralizadores

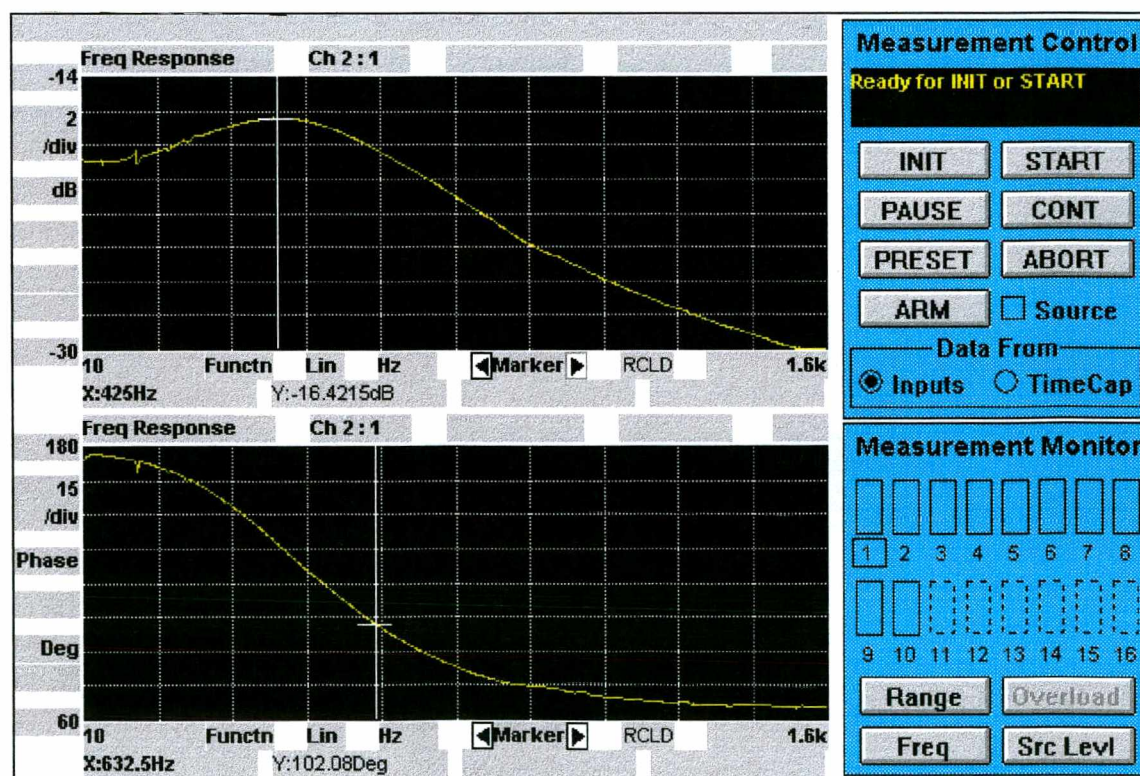
Neutralizador	Frequências teóricas [Hz]	Frequências experimentais [Hz]	erro [%]
1	510.66	512	0.26
2	406.86	425	4.45
3	515.4	537.5	4.28
4	473.24	485	2.48

Os erros mostrados na tabela 6.4, para o neutralizador 2 e 3, podem ser atribuídos às imprecisões causadas pelo corte do material viscoelástico. Este processo foi realizado manualmente. Outra fonte de erro é a temperatura ambiente, como será mostrado no capítulo VII. Pequenas variações da temperatura provocam dispersões na frequência natural desses dispositivos. Isto deve-se às variações que sofre o módulo de cisalhamento com a temperatura (anexo 3).





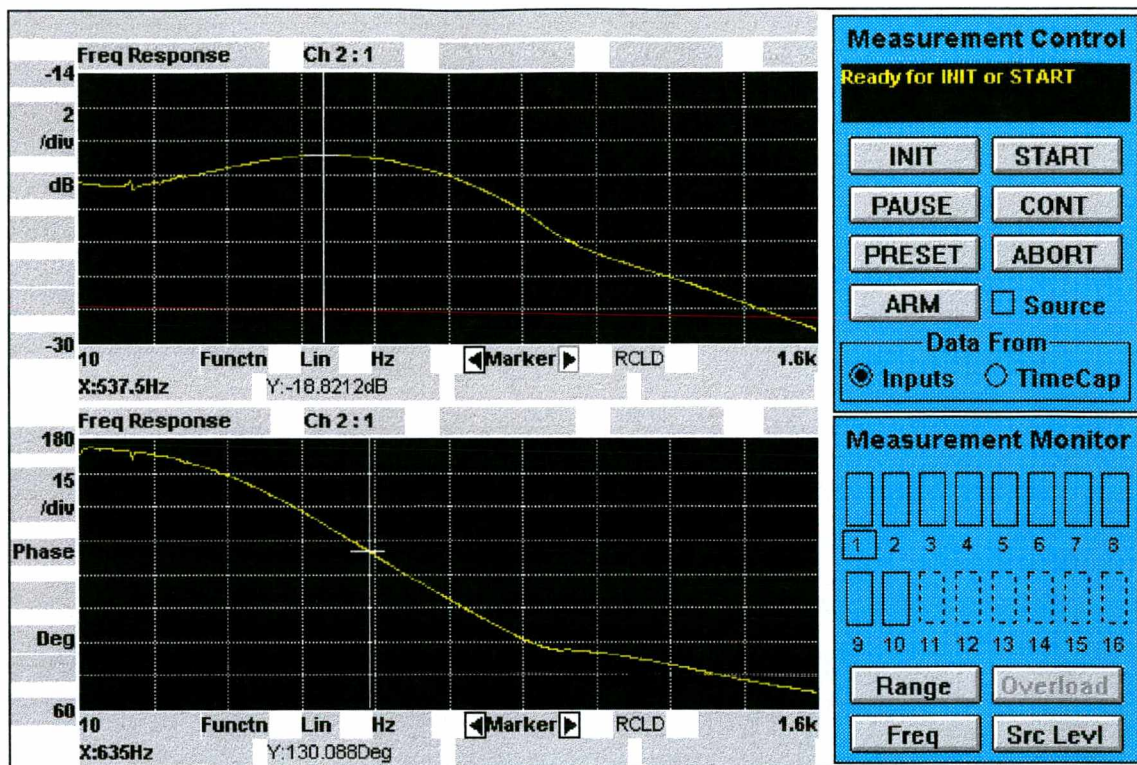
(a)



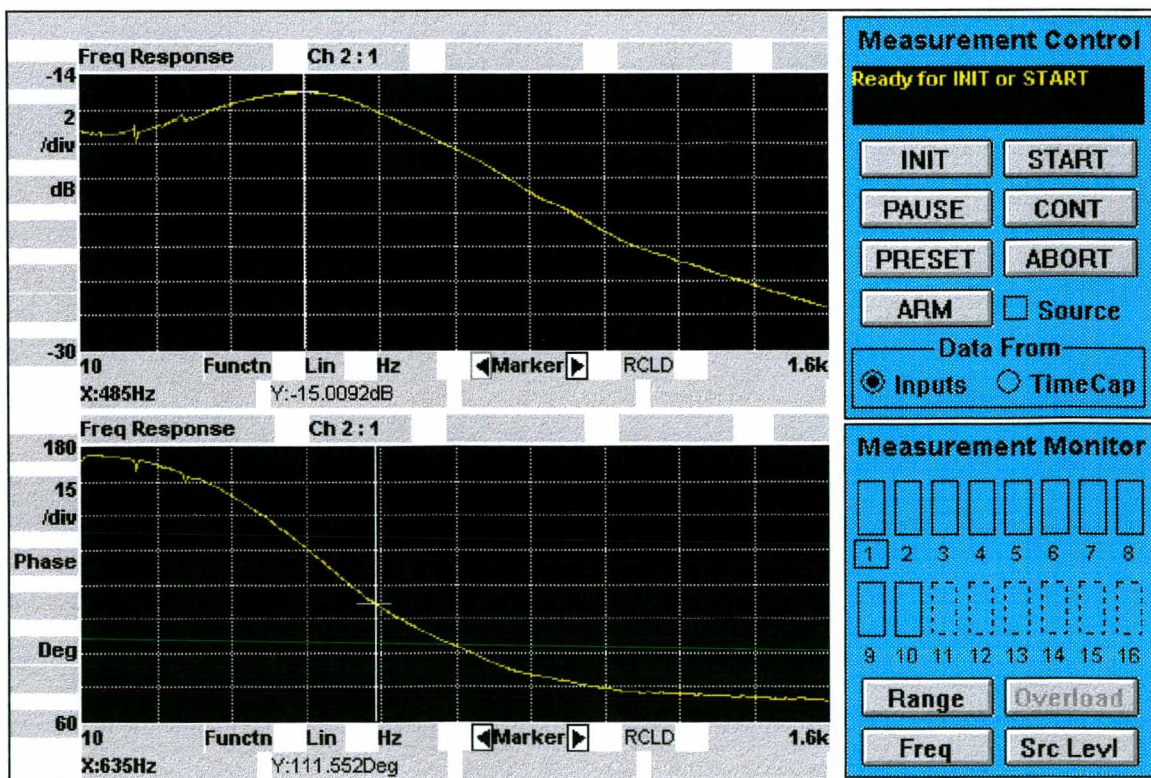
(b)

FIGURA 6.15 - a) Relação de deslocamentos do neutralizador 1 b) neutralizador 2  
A transmissibilidade é dada pela parte superior dos gráficos.





(a)



(b)

FIGURA 6.16 - a) Relação de deslocamentos do neutralizador 3 b) neutralizador 4  
A transmissibilidade é dada pela curva superior dos gráficos acima.



### 6.3.2 - Sistema Composto: Montagem e Respostas em Frequência

Os neutralizadores foram fixados nos pontos 1, 7, 64 e 70. Estes pontos correspondem aos cantos da placa mostrada na figura 6.1. A forma de fixação foi através de ajuste forçado. Na figura 6.17 uma fotografia mostra o sistema composto e os dispositivos de medição utilizados.

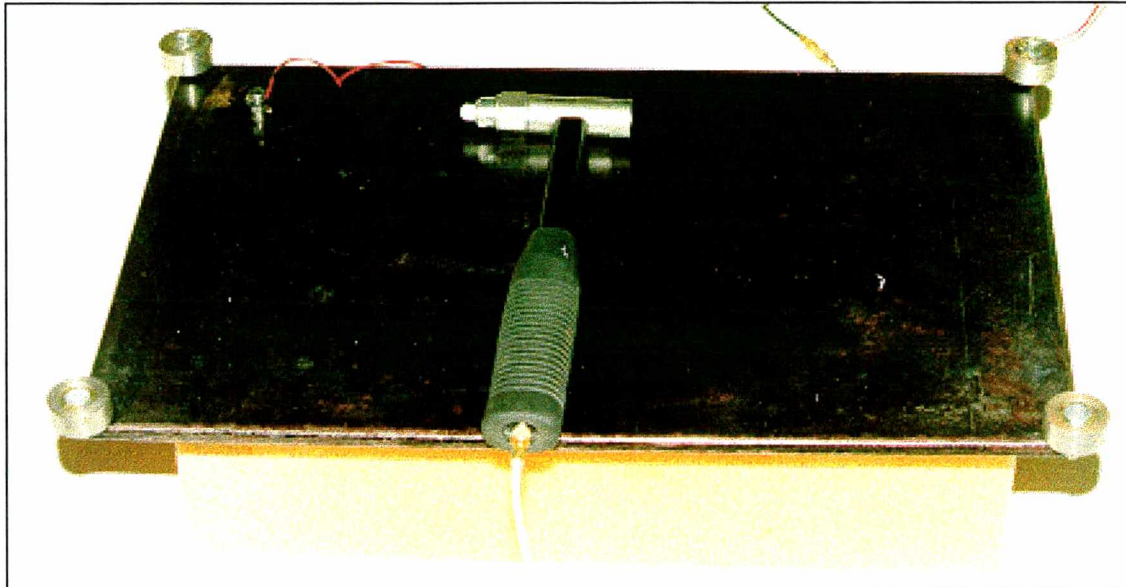


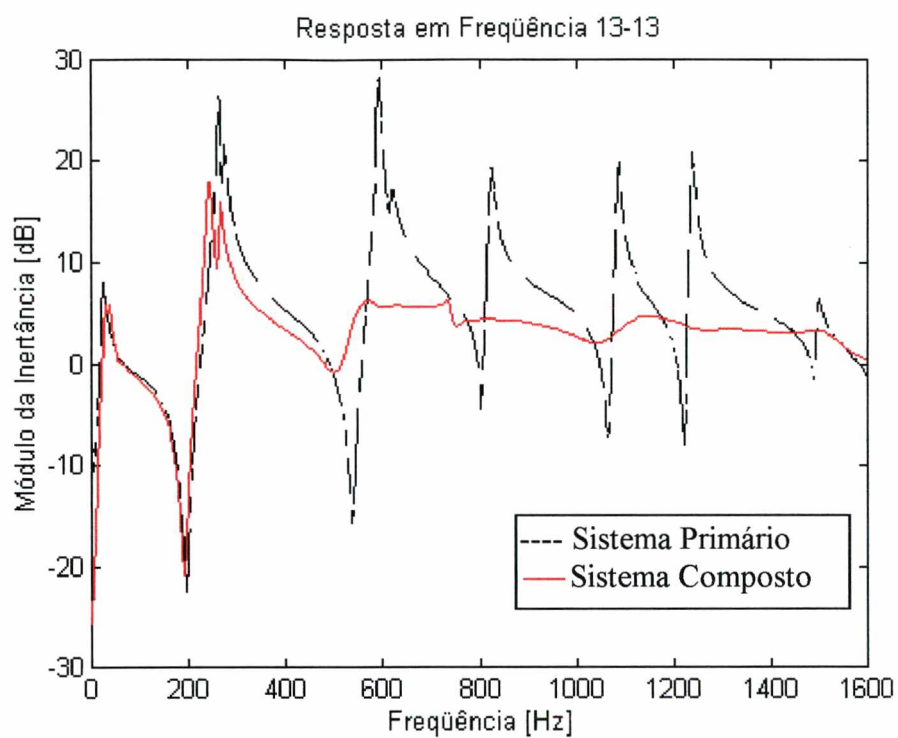
FIGURA 6.17 - Sistema composto - Foto da parte experimental.

As medições das respostas do sistema composto (estrutura + neutralizadores) foram realizadas nas mesmas condições que para o sistema primário (figura 6.2). Na figura 6.18, são mostradas as respostas do sistema composto, podendo ser comparadas com as mesmas respostas obtidas em forma numérica. Na figura 6.18a tem-se a resposta em frequência (inertância) 13-13 e na figura 6.18b a resposta 13-58.

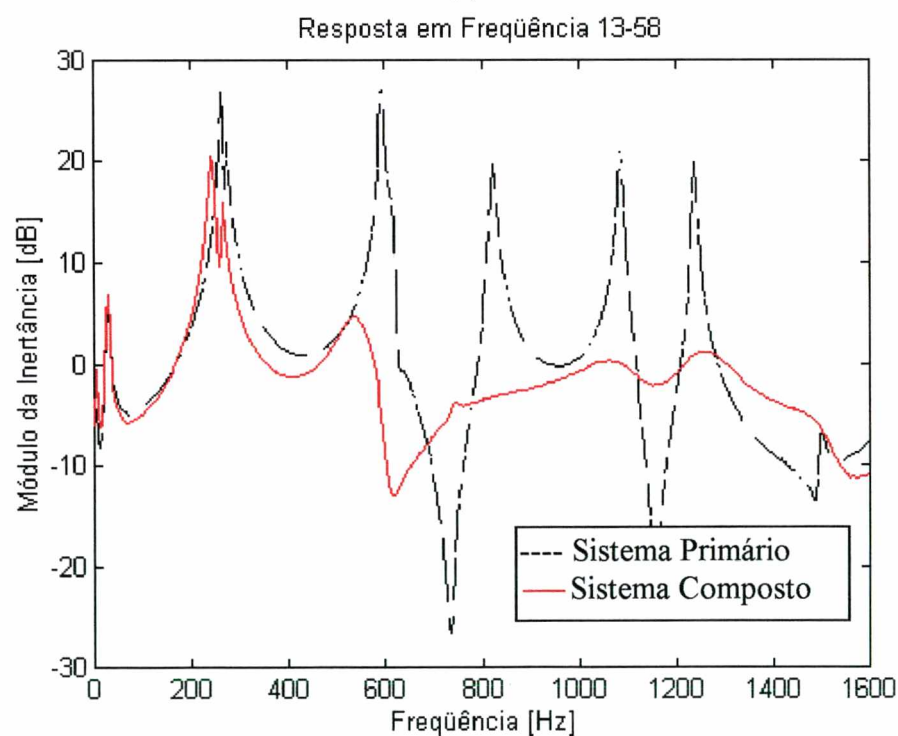
## 6.4 - Comparação entre os Resultados Numéricos e Experimentais

Uma simples inspeção das figuras 6.18 e 6.11 mostra quantitativamente a excelente predição numérica dos resultados experimentais. As pequenas diferenças entre estas curvas são atribuídas às diferenças entre as frequências naturais dos neutralizadores, obtidas numericamente, e as realmente produzidas na prática. A redução de 20 [dB], aproximadamente, na faixa de frequência analisada, foi reproduzida experimentalmente. Cabe salientar que este valor, como apresentado no capítulo V, está relacionado intimamente com o amortecimento do sistema primário. Aqui, a placa de aço foi simplesmente apoiada em uma espuma de poliuretano, aumentando o amortecimento do sistema a controlar.

Como será mostrado no capítulo VII deve considerar-se a influência da temperatura no material viscoelástico dos neutralizadores, podendo modificar em maior ou menor medida, o desempenho dos mesmos.



(a)



(b)

FIGURA 6.18 - Resposta medida experimentalmente a) 13-13 b) 13-58

# **CAPÍTULO VII**

## **INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NOS NEUTRALIZADORES VISCOELÁSTICOS**



## **CAPÍTULO VII: INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NOS NEUTRALIZADORES VISCOELÁSTICOS.**

Neste capítulo mostra-se a influência da temperatura sobre os neutralizadores dinâmicos construídos com material viscoelástico. Medições experimentais da transmissibilidade para um dado neutralizador mostram as variações das frequências naturais com a temperatura ambiente.

Uma análise para determinar a temperatura final interna sobre o material viscoelástico do neutralizador será realizada, quando este dispositivo é excitado na frequência de ressonância. Esta análise é importante uma vez que a temperatura do elastômero em regime poderia prejudicar o funcionamento ótimo dos neutralizadores dinâmicos.

Foram realizadas medições experimentais utilizando termopares e análises teóricas de transferência de calor, através de modelo de elementos finitos, para determinar a temperatura do elastômero em regime permanente.

### **7.1 - Influência da Temperatura sobre os Neutralizadores Viscoelásticos**

Os neutralizadores dinâmicos, como mostrado no capítulo VI, foram construídos com material viscoelástico Tipo II (região de transição). Nestes materiais, o fator de perda permanece praticamente constante e o módulo de cisalhamento varia proporcionalmente com a frequência e a temperatura (Capítulo II, Anexo 3). Para o caso particular, material DYAD 601, o módulo de cisalhamento é muito sensível às variações de temperatura. Em geral, segundo Espíndola (1990), materiais que possuem baixo fator de perda apresentam uma variação menor no módulo de cisalhamento se comparados com materiais que possuem um alto fator de perda. É bom lembrar que o material usado aqui, conhecido como DYAD 601, tem um elevado fator de perda (aproximadamente 0.6).

A análise da influência da temperatura para este tipo de material é fundamental, uma vez que grandes variações da mesma, poderiam dessintonizar os neutralizadores, prejudicando o controle da estrutura primária dentro da faixa de frequência escolhida.

A variação da temperatura no material viscoelástico do neutralizador é devida à:

- variação da temperatura ambiente,
- variação da temperatura através da geração interna de calor no material viscoelástico, quando o neutralizador é excitado em forma permanente.

#### **7.1.1 - Frequência Natural dos Neutralizadores em Função da Temperatura Ambiente**

Como visto no capítulo III, a frequência natural do neutralizador é dada pela expressão:

$$\Omega_a = \sqrt{\frac{LG(\Omega_a)}{m_a}} \quad (7.1.1.1)$$

Para quantificar a influência da temperatura ambiente, considera-se o caso particular dos neutralizadores construídos neste trabalho. Calculam-se os diferentes valores do módulo de

cisalhamento, para as temperaturas de 19,20 e 21 graus Celsius, com ajuda das curvas do módulo de cisalhamento obtidas no anexo 3. Com esses valores de cisalhamento e as características do neutralizador escolhido para análise (neutralizador 3), determinam-se as frequências naturais em forma teórica. Os dados do neutralizador são:

$$L = 0.0784 [m]$$

$$m_a = 0.02137 [Kg]$$

Supondo uma frequência de 515.4 [Hz], determina-se o módulo de cisalhamento e calculam-se as frequências naturais do neutralizador número 3 para as temperaturas antes mencionadas, utilizando a expressão (7.1.2).

A tabela 7.1, mostra os resultados obtidos, em forma teórica, para frequência natural em cada temperatura escolhida na análise.

TABELA 7.1 - Variação das características do neutralizador 3 com a temperatura

Temperatura [K]	Módulo de Cisalhamento $10^7 [N / m^2]$	Frequência Natural [Hz]
292.16	1.2368 / 4	536.04
293.16	1.1437 / 4	515.4
294.16	1.064 / 4	497

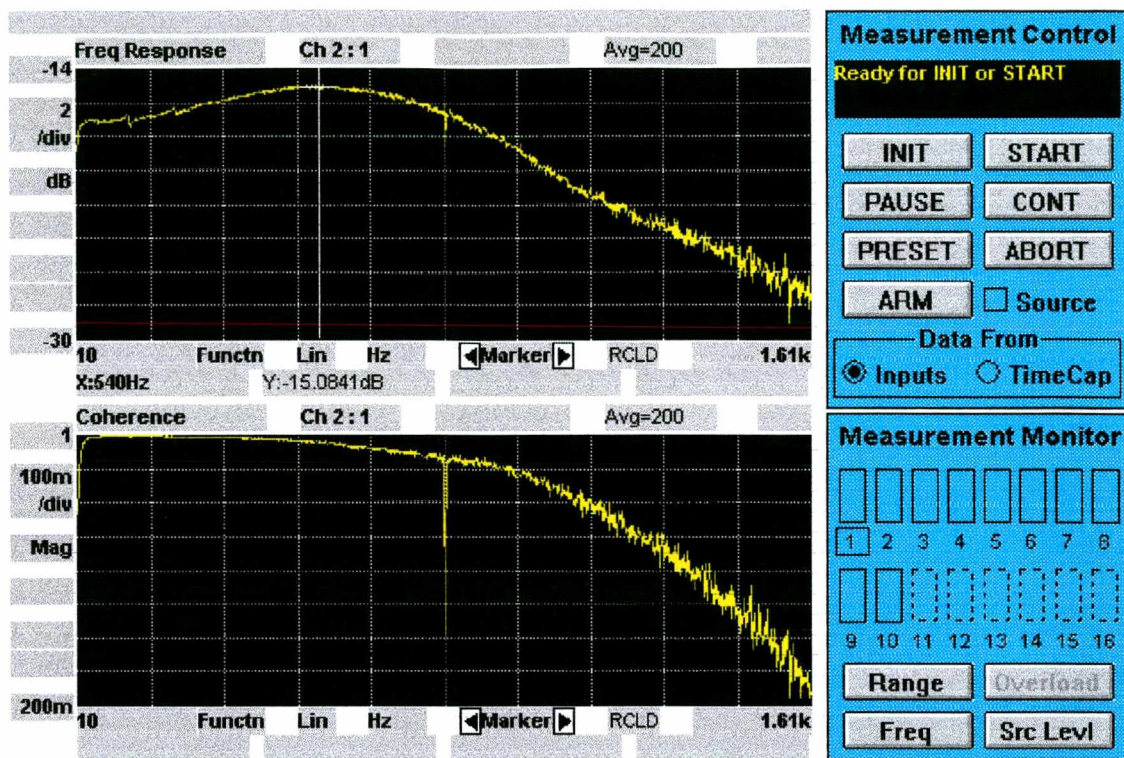
Uma estimativa da frequência natural em função da temperatura ambiente, obtida experimentalmente, serve para corroborar os resultados teóricos mostrados na tabela 7.1. A figura 7.1 mostra as curvas de transmissibilidade (módulo da relação de deslocamentos, medidos na base e na massa do neutralizador 3) para as temperaturas da tabela 7.1. A montagem experimental, pela qual foram levantadas estas curvas, foi mostrada no capítulo VI (figura 6.14).

Na tabela 7.2 pode-se visualizar as frequências naturais correspondentes às curvas da figura 7.1. Nota-se uma excelente correlação entre o comportamento esperado e o medido. Apesar da alta correlação entre estes resultados, não foi possível obter repetitividade devido às variações da temperatura na sala de medições. Esta análise serve apenas para mostrar o comportamento do material viscoelástico quando este faz parte de um dispositivo (neutralizador) submetido a variações da temperatura ambiente.

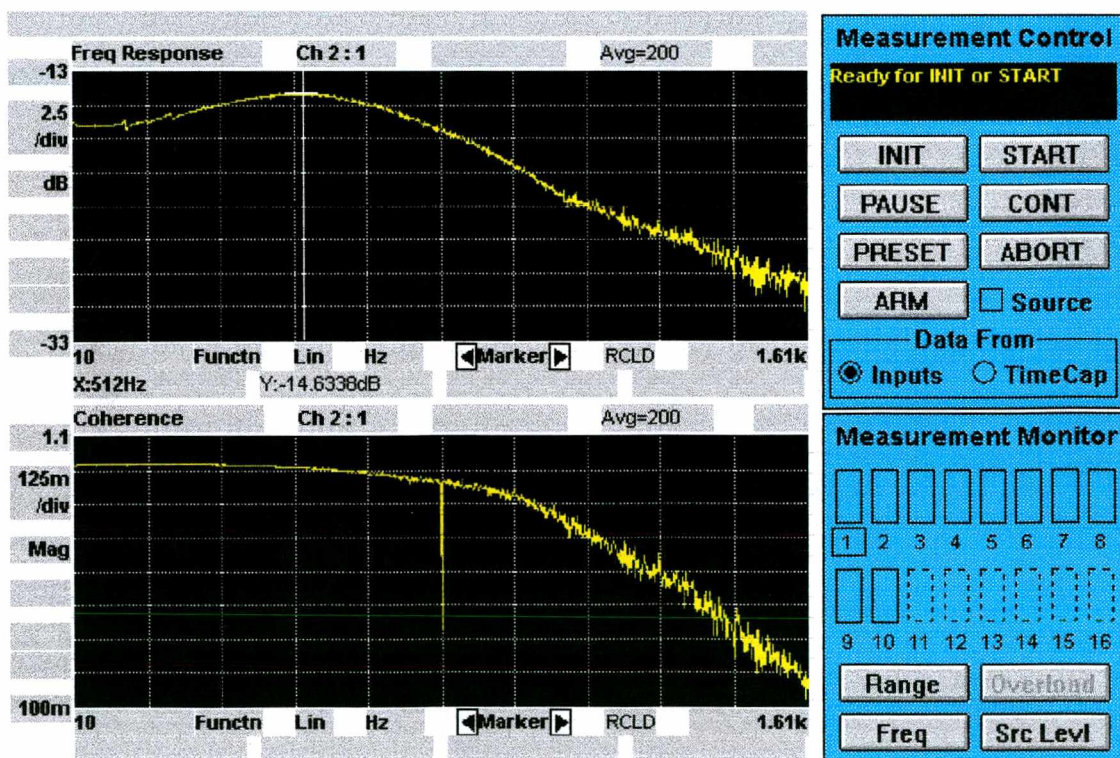
TABELA 7.2 - Frequências naturais em função da temperatura ambiente.

Temperatura [K]	Frequência Natural Teórica [Hz]	Frequência Natural Experimental [Hz]
292.16	536.04	540
293.16	515.4	512
294.16	497	496



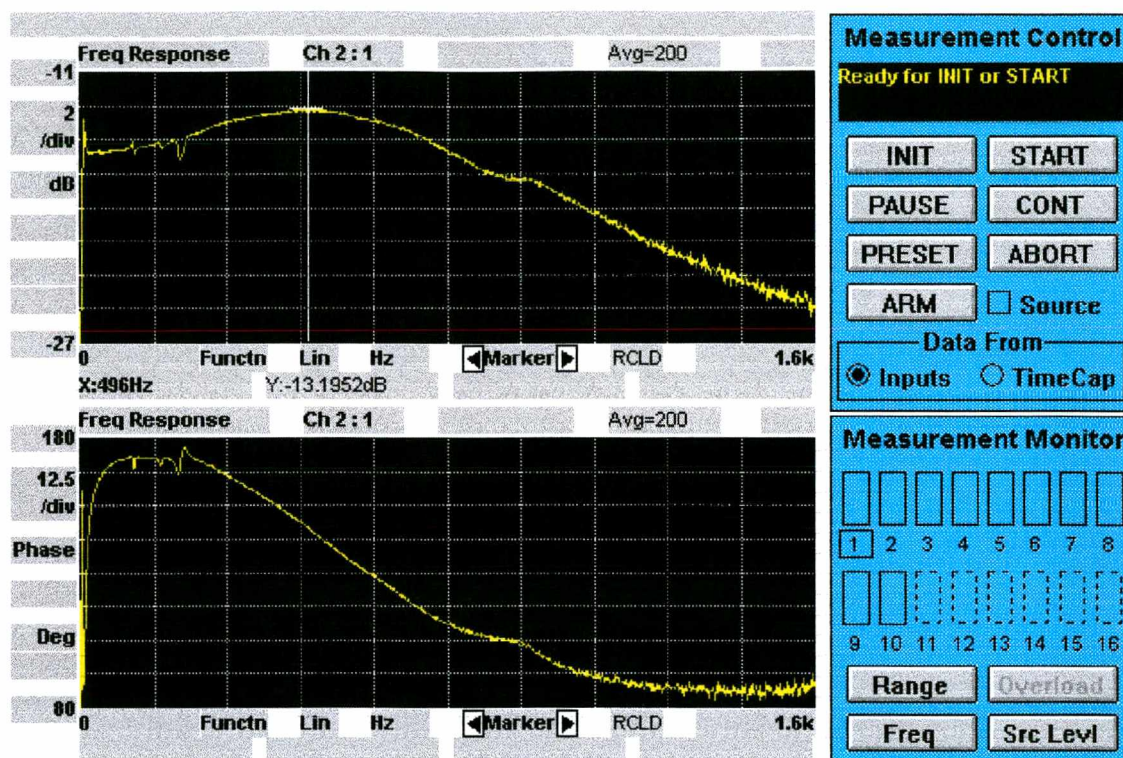


(a) 19 graus Celsius



(b) 20 graus Celsius





(c) 21 graus Celsius

FIGURA 7.1 - Relação de deslocamentos do neutralizador 3 para: a) 19 b) 20 c) 21 graus Celsius. A transmissibilidade é dada pela curva superior destes gráficos.

Da tabela 7.2, pode-se extrair as seguintes informações:

- as curvas características do material viscoelástico, obtidas no anexo 3, predizem, de forma razoável, o comportamento deste material em função da temperatura e da frequência;
- pequenas variações de temperatura produzem significativas variações da frequência natural do neutralizador para este tipo de material viscoelástico.

### 7.1.2 - Variação da Temperatura do Neutralizador Devida à Dissipação de Calor

Quando o neutralizador está vibrando, o material viscoelástico gera uma quantidade de calor que depende dos seguintes parâmetros:

- massa do neutralizador;
- frequência natural do mesmo;
- fator de perda do material viscoelástico;
- frequência de excitação;
- módulo do deslocamento na base do neutralizador ao quadrado.

Utilizando a expressão (3.2.2.1) junto com o conceito de amortecimento equivalente generalizado, (expressão (3.1.2.1)) determina-se a quantidade de calor gerado por ciclo, em um neutralizador simples composto de material viscoelástico (Espíndola, 1987):

$$E_d = \pi \frac{m_a \Omega_a \eta(\Omega) \varepsilon_a^2 \Omega |Q(\Omega)|^2}{[\varepsilon_a - 1]^2 + \eta^2(\Omega)}, \quad (7.1.1)$$

sendo  $Q(\Omega)$  o deslocamento na base do mesmo.

Parte do calor gerado (aquele que não é dissipado) provocará um aumento da temperatura do material viscoelástico. Este aumento da temperatura provocará uma diminuição do módulo de cisalhamento. Como a frequência natural do neutralizador varia com a raiz quadrada do módulo de cisalhamento, uma diminuição deste fará que os  $p$  neutralizadores trabalhem, em menor ou maior medida, fora do ponto ótimo. Uma análise da temperatura final do neutralizador, produto do calor gerado internamente pelo material viscoelástico, permitirá quantificar a influência deste efeito sobre as frequências naturais.

### 7.1.2.1 - Medições Experimentais

Para medir a temperatura no material viscoelástico que faz parte do neutralizador dinâmico foram fixados, no interior do mesmo, termopares. Os termopares são dispositivos que produzem uma diferença de potencial ante um aumento da temperatura. O esquema básico desta medição é mostrado na figura 7.2. Em um extremo, dois fios de cobre e “constantan” ficarão em contato direto entre si e o corpo cuja temperatura deseja-se medir, no outro extremo, os fios ficaram imersos em um recipiente com água (temperatura de referência). À saída destes, um voltímetro fornece a diferença de potencial que é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo e a referência.

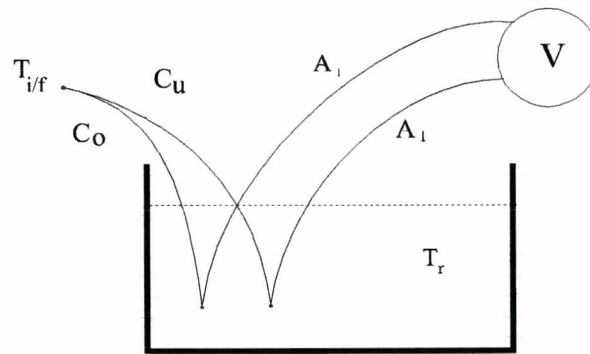


FIGURA 7.2 - Esquema de medição da temperatura do material viscoelástico, para uma dada excitação no neutralizador.

Para medir a temperatura de referência, utilizou-se um termômetro industrial marca Inco Herm com faixa de leitura de (-1 a 60 graus Celsius). O voltímetro é um Hewlett Packard 34401 A, com uma precisão de 0.001 mV DC.

As equações que regem este fenômeno são:

$$V_i = (\alpha_{Co} - \alpha_{Cu})(T_i - T_r) \quad (7.1.2.1)$$



sendo  $V_i$  o potencial inicial,  $(\alpha_{Co} - \alpha_{Cu})$  o coeficiente que relaciona o aumento do potencial para cada variação unitária da temperatura do material viscoelástico e a referência,  $T_i$  e  $T_r$  as temperaturas inicial e de referência, respectivamente. Este coeficiente depende dos materiais utilizados no termopar e da temperatura ambiente. Segundo Ramos, Zaro e Dias de Suoza (1986) o valor de  $(\alpha_{Co} - \alpha_{Cu})$  para temperatura de 20 graus Celsius é de  $40 \mu V / K$ . Em geral, esta relação varia com a temperatura ambiente. Quando o neutralizador for excitado a uma frequência estabelecida, em regime permanente, o voltímetro acusará o seguinte valor:

$$Vf = (\alpha_{Co} - \alpha_{Cu})(T_f - T_r) \quad (7.1.2.2)$$

sendo  $Vf$  o potencial final e  $T_f$  a temperatura final do elastômero. Das expressões (7.1.2.1) e (7.1.2.2) chega-se a diferença de potencial entre o estado inicial e final, em função do aumento de temperatura do elastômero:

$$\Delta V = 40(T_f - T_i). \quad (7.1.2.3)$$

Isto é equivalente a dizer que, um aumento de 1 grau Celsius no material viscoelástico provocará uma diferença de potencial  $\Delta V = 40 [\mu V]$ . Na figura 7.3, uma fotografia da montagem experimental mostra os instrumentos utilizados para o cálculo da temperatura do elastômero. Na excitação, utilizou-se um excitador Brüel & Kjaer tipo 4809 para produzir uma sinal senoidal de frequência igual à frequência natural do neutralizador. A resposta, na base do neutralizador, para o cálculo posterior do calor gerado (expressão 7.1.1), foi medida com um acelerômetro tipo 4375 Brüel & Kjaer. Um transdutor magnético MM 0002 foi utilizado para medir a resposta na massa do neutralizador.



FIGURA 7.3 - Fotografia do dispositivo de medição da temperatura em regime permanente para o neutralizador número 3.

Os resultados obtidos em duas medições foram :

temperatura ambiente =  $20^{\circ} C$  ,

temperatura da água =  $17^{\circ} C$  ,

frequência de excitação =  $660 [Hz]$  ,

módulo do deslocamento na base do neutralizador ( $|Q(\Omega_a)|$ , na expressão (7.1.1)) =  $0.0688 [mm]$ .

$$V_1^0 = 20 \mu V$$

$$V_1^1 = 29 \mu V$$

$$V_2^0 = 23 \mu V$$

$$V_2^1 = 34 \mu V$$

$$\Delta V \cong 11 [\mu V]$$

$$f_{a_{inicial}} = 660 [Hz]$$

$$f_{a_{final}} = 590 [Hz]$$

Com  $\Delta V \cong 11 [\mu V]$  e utilizando a expressão (7.1.2.3), encontra-se o incremento de temperatura no material viscoelástico para a excitação mencionada:

$$\Delta T = 0.3 K = 0.3^{\circ} C .$$

Vários inconvenientes foram encontrados neste experimento, sendo alguns deles:

- variação da temperatura ambiente durante as medições,
- variação da temperatura de referência,
- imprecisão do instrumento de medição de temperatura ambiente e de referência.

O incremento de temperatura que se deseja medir é da ordem da precisão do instrumento utilizado para medir a temperatura de referência. Ainda assim, este resultado mostra que existe uma grande dissipação de energia no neutralizador, provocando um baixo aumento da temperatura no material viscoelástico. Se o desenho dos neutralizadores não permitisse esta dissipação, a temperatura interna do elastômero seria maior, podendo variar as frequências naturais dos mesmos e, com isto, provocar um controle defeituoso.

Este incremento de temperatura pode ser obtido em forma teórica, através de um modelo de elementos finitos. Utilizando a expressão (7.1.1), conhecendo o deslocamento na base do neutralizador e certas características do material viscoelástico, calcula-se o calor gerado por ciclo. Com a frequência de excitação, pode calcular-se a potência em  $[W]$  e dividendo pelo volume de material viscoelástico a potência por unidade de volume  $[W / m^3]$ . Este valor é requerido pelo programa de elementos finitos utilizado para o cálculo da transferência de calor.

Com,



$$\Omega = \Omega_a = 4146.167 [rad / seg],$$

$$\eta(\Omega) \cong 0.6,$$

$$\varepsilon_a = 1,$$

$$m_a = 0.02137 [Kg],$$

$$|\overline{Q}(\Omega_a)| = 0.0688 [mm],$$

o calor gerado por ciclo será (equação (7.1.1)):  $D_G = 0.009108 [Nm]$ .

A potência gerada é dada pela relação entre o calor gerado por ciclo e a frequência  $\Omega_a$ . Seu resultado é:  $D_G = 6.011 [Watt]$ .

A potência gerada por unidade de volume é igual à relação entre a potência gerada e o volume de material viscoelástico:  $D_G = 15531 [Watt / m^3]$ .

### 7.1.2.2 - Predição da Temperatura Interna através do Modelo de Elementos Finitos

Como visto no item anterior, a temperatura, produto do calor gerado ao excitar o neutralizador, pode ser obtida em forma experimental. Outra forma de calcular esta é através de um modelo matemático, uma vez que, na prática, não se terá um termopar em cada neutralizador, por razões econômicas. Ainda, o modelo matemático é fundamental para prever a temperatura final de trabalho do material viscoelástico para o projeto dos neutralizadores. O parâmetro temperatura, em um caso extremo, poderia mudar o projeto final destes dispositivos.

Neste item calcula-se a temperatura de regime permanente através de um modelo matemático de elementos finitos. Os passos seguidos podem ser encontrados no anexo 4 e o programa utilizado foi o ANSYS 5.0. Modelando o neutralizador pela técnica de elementos finitos e introduzindo as características dos materiais que formam parte do neutralizador, calcula-se a distribuição de temperatura, produto da quantidade de calor gerada no interior do material viscoelástico. A temperatura de referência foi considerada  $20^\circ C$  e a transferência de calor por condução e convecção. Dados adicionais podem ser encontrados no anexo 4.

A distribuição de temperatura foi obtida para dois valores do coeficiente de película do ar. Assim, uma análise de sensibilidade mostra a importância na escolha correta deste coeficiente. Deve-se lembrar que o coeficiente de película para gases varia de  $2 a 25 [W / m^2 K]$  para convecção livre e de  $25 a 250 [W / m^2 K]$  para convecção forçada.

Na figura 7.4, mostra-se a distribuição de temperatura para um coeficiente de película do ar de  $5 e 3 [W / m^2 K]$ . O primeiro valor foi dado para as superfícies exteriores, em contato com o ar, e o segundo valor, para as superfícies internas do neutralizador. Na figura 7.5 o coeficiente toma os valores  $20 e 5 [W / m^2 K]$ , respectivamente.

Pode-se observar que a distribuição de temperaturas é sensível a esses coeficientes. A escolha adequada dos mesmos deve seguir um processo iterativo entre as medições experimentais e o modelo matemático, até que ambos resultados convirjam. Na figura 7.5 observa-se que o incremento de temperatura no material viscoelástico se aproxima mais do valor obtido experimentalmente. O primeiro par de valores (coeficiente de convecção do ar) é escolhido com base no tamanho do dispositivo, considerando convecção livre. O segundo par, figura 7.5, considera que a vibração do neutralizador, pequena em amplitude neste caso particular, pode provocar uma convecção forçada.

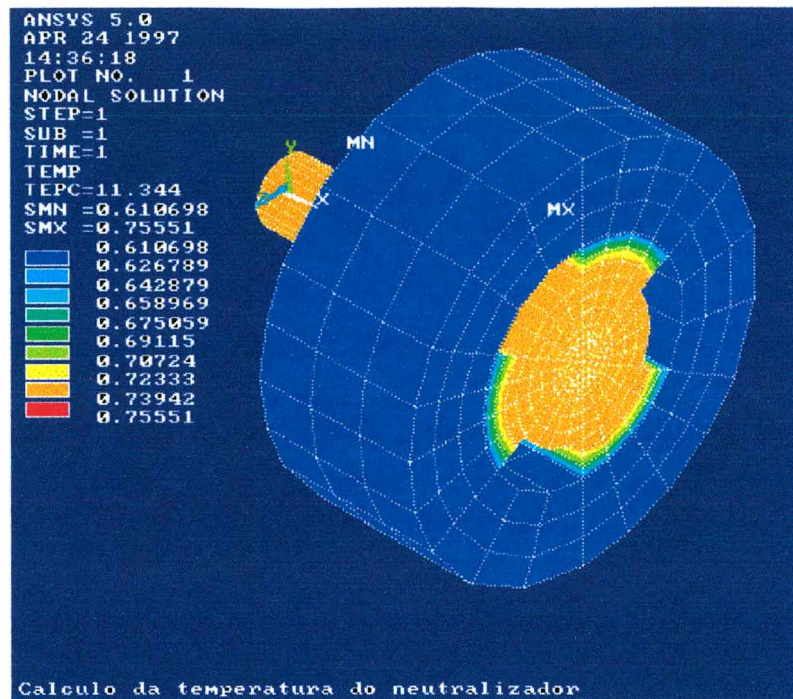


FIGURA 7.4 - Distribuição da temperatura no neutralizador (coeficiente de película do ar  $5 \text{ e}3 [W / m^2 K]$ )

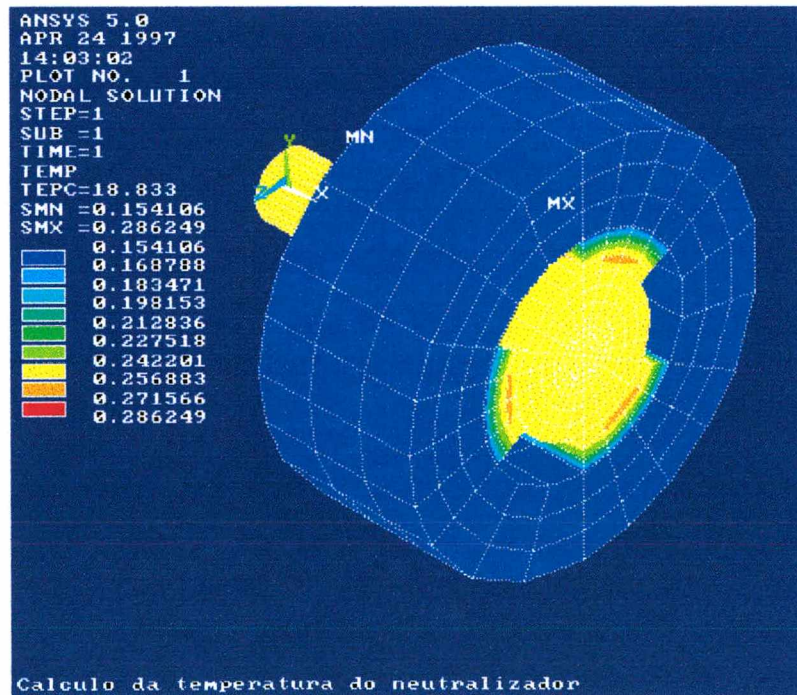


FIGURA 7.5 - Distribuição de temperatura do neutralizador (coeficiente de película  $20 \text{ e}5 [W / m^2 K]$ )



# **CAPÍTULO VIII**

**COMENTÁRIOS FINAIS,  
CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA  
TRABALHOS FUTUROS**

## CAPÍTULO VIII: COMENTÁRIOS FINAIS, CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.

### 8.1 - Comentários Finais

Os modelos matemáticos utilizados no trabalho, tanto para os neutralizadores quanto para o sistema primário e as técnicas de programação não linear para a determinação dos parâmetros ótimos dos neutralizadores, mostraram uma excelente correlação com os resultados experimentais.

A metodologia implementada no controle de uma estrutura qualquer em uma faixa de frequência, através de neutralizadores de um grau de liberdade mostra-se simples e de uma grande generalidade. O fator marcante desta metodologia é que se perde a visão de controle modo a modo. Isto é, para as teorias anteriores cada neutralizador, ou vários deles, eram sintonizados para um determinado modo. A partir desta nova metodologia passa-se a trabalhar em uma faixa de frequências, onde um neutralizador, ou uma coleção deles, pode controlar vários modos.

A utilização de técnicas de otimização com informação de derivadas permitiu trabalhar nos casos mais gerais, onde vários modos são controlados simultaneamente através de  $p$  neutralizadores. Isto foi conseguido através da escolha adequada da função objetivo proveniente das coordenadas principais, permitindo a diferenciação da mesma na região viável. Várias outras técnicas de otimização não linear podem ser utilizadas com o mesmo fim. A preocupação deste trabalho não foi a escolha da melhor técnica de otimização para o problema de controle de vibração passiva e sim, a escolha de uma técnica que conseguisse resolver o problema de forma a atender o objetivo inicial. Ainda assim, o método Quase Newton é uma técnica de otimização não linear muito utilizada, que fornece excelentes resultados em um tempo computacional aceitável. O método das ponderações externas, método conhecido e consagrado, quando implementado ao problema, permitiu agilizar radicalmente a procura do ponto ótimo.

Vários inconvenientes foram encontrados na parte experimental para o cálculo das características do material viscoelástico, características estas que são fundamentais para construir os neutralizadores. Resultados não esperados no trabalho de Alvarenga (1994) fizeram que o levantamento dessas características seja imprescindível para o êxito deste trabalho.

Alguns desses inconvenientes foram:

- preparação das vigas sanduíche. A retífica das lâminas metálicas externas precisou de muitos cuidados, uma vez que o tipo de máquinas disponíveis e as dimensões requeridas nas vigas produziam grandes deformações localizadas. Várias lâminas tiveram que ser refeitas por estas razões.
- A construção artesanal das vigas sanduíche provocou alguns defeitos na junção das lâminas externas com o material viscoelástico, podendo ter introduzido erros no levantamento das características dinâmicas do material viscoelástico. Somando-se a isto, a quantidade de vigas utilizadas no ensaio (sete), devido à disponibilidade de material no laboratório, o intervalo de confiança foi menor que 80%, como estabelecido por Lopes (1994).

Mesmo assim, consegue-se implementar o ensaio para levantar as características de materiais viscoelásticos de forma integrada, entre a câmara de climatização e o analisador de Fourier 3567 A. Isto permitiu utilizar todos os recursos do analisador digital para o levantamento das respostas em frequências da viga sanduíche, visualizando o seu comportamento para as diferentes temperaturas.



As deficiências de uma função não linear para o ajuste dos dados experimentais do fator de perda levou à utilização de séries de Fourier. Este ajuste por mínimos quadrados, forneceu excelentes resultados. Ainda assim, a escolha de uma função não linear geral seria importante, uma vez que a série de Fourier se restringe ao período  $[-\pi, \pi]$  por exemplo. Esta mudança de domínio cria uma dependência da curva ajustada com os pontos experimentais no sentido de preservar as frequências reduzidas (variável independente) inferior e superior.

Para obter o módulo de cisalhamento destes materiais, em qualquer ponto dentro dos valores discretos obtidos experimentalmente, um ajuste através de técnicas de otimização não linear foi utilizado. Duas técnicas foram testadas para tal fim. O método de Quase Newton e o método do poliedro flexível. Os resultados obtidos foram semelhantes em ambos casos.

Todos estes inconvenientes podem ter levado a algum erro nos resultados, mas serviram como experiência e foram altamente úteis na construção e projeto dos neutralizadores. Por outro lado, os resultados do capítulo VI demonstram que as características obtidas para o material viscoelástico em forma experimental são representativas desse material. Isto pode ser visto, também, na comparação entre as frequências naturais dos neutralizadores teórica e experimental.

Observa-se uma diferença entre o módulo de cisalhamento aqui obtido e o encontrado em Nashif (1985). Estes têm uma ordem de grandeza menor se comparado com os resultados do Anexo 3). No fator de perda os valores são semelhantes. Isto pode ter sido a causa dos resultados pouco esperados, no trabalho de Alvarenga (1994).

Uma vez conhecidas as características dos materiais viscoelásticos procedeu-se à construção dos neutralizadores dinâmicos. Adota-se o uso de quatro (4) fitas de material em série para aumentar o fator de forma  $L$  e, com isto, maior facilidade na construção manual dos neutralizadores. Novamente, vários cuidados deveram ser tomados: o escasso material viscoelástico existente e o as dimensões do anel de aço que devia conter a massa dos neutralizadores não permitiria erros na construção.

Construídos os neutralizadores e medidas a suas respostas, a montagem sobre o sistema primário (placa de aço apresentada no capítulo VI) foi o seguinte passo. No sistema composto, um levantamento da resposta em frequência (inertância) foi realizado e comparado com os resultados teóricos. A grande semelhança entre ambos resultados mostra que a metodologia proposta neste trabalho, sobre controle passivo em uma faixa de frequência, para uma estrutura qualquer, é totalmente representativa na prática.

Uma representação gráfica para entrada e saída de dados foi realizada em “Visual Basic 3.0”. Com uma simples manipulação do usuário escolhe-se os diferentes tipos de dados de entrada para os diferentes modelos utilizados no sistema primário. Esses modelos matemáticos são:

- modelo viscoso;
- modelo histerético.

Geralmente o modelo matemático viscoso é utilizado pelas técnicas de elementos finitos e técnicas de identificação no domínio do tempo, enquanto o modelo histerético é utilizado pelas técnicas de identificação no domínio da frequência. Para ambos os casos, um algoritmo em Fortran 77 realizará os cálculos. Assim, uma vez escolhido os dados de entrada e o tipo de modelo a utilizar, os parâmetros ótimos dos neutralizadores e o seu efeito no sistema primário serão encontrados.

Uma outra possibilidade de escolha, dentro da saída gráfica, refere-se à variável de projeto  $x$  da seguinte forma:



- considerando todos os neutralizadores construídos com diferentes materiais viscoelásticos, ter-se-á  $2p$  componentes, sendo  $p$  o número de neutralizadores;
- considerando os neutralizadores compostos do mesmo material viscoelástico, a variável de projeto terá  $p + 1$  componentes;
- Com material viscoelástico conhecido. Neste caso as suas características são dados de entrada no programa e a variável de projeto terá  $p$  componentes apenas (frequências naturais do neutralizadores).

Estas escolhas podem ser realizadas tanto para modelo viscoso quanto para o modelo histerético do sistema primário. Em todos os casos, um programa de otimização não linear será executado, desde a representação gráfica, para o controle em uma faixa de frequência.

A saída do programa permite uma visualização rápida da resposta do sistema primário comparada com a resposta do sistema composto com neutralizadores ótimos.

Na figura 7.6 mostra-se a saída gráfica, contendo todas as opções apresentadas no parágrafo anterior.

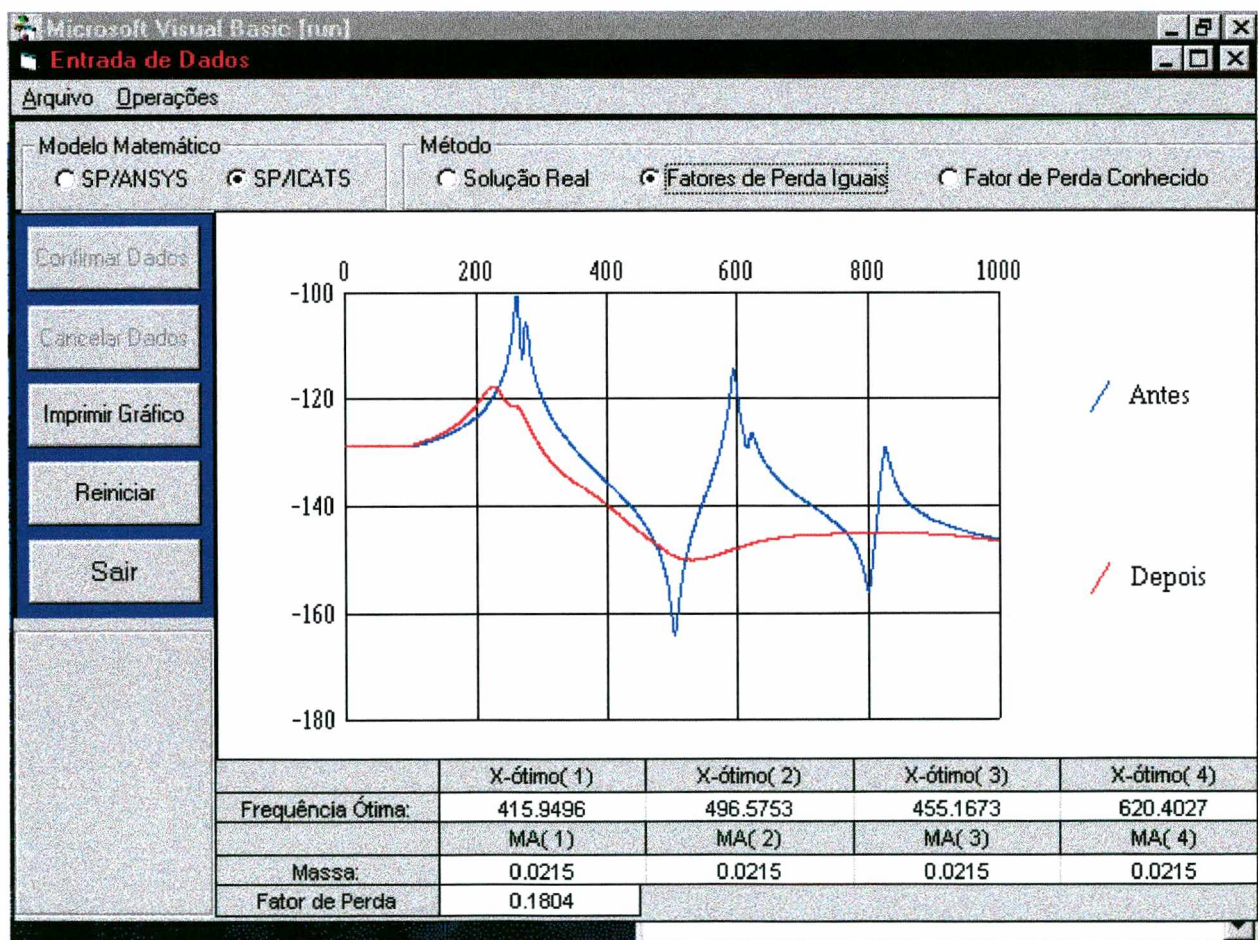


FIGURA 7.6 - Saída gráfica da metodologia proposta neste trabalho para redução de vibração em uma faixa de frequência

## 8.2 - Conclusões

Foi desenvolvida uma metodologia geral para a redução de vibração em banda larga, utilizando neutralizadores dinâmicos simples. Conhecendo as características de uma estrutura linear qualquer (parâmetros modais da mesma), encontram-se os parâmetros ótimos de  $p$  neutralizadores simples cuja localização foi previamente estabelecida. Um mínimo conhecimento sobre teoria modal é necessário. O modelo matemático utilizado nesta metodologia foi o viscoelástico. Este modelo possui excelentes propriedades dinâmicas, na região de transição, sendo apto para reduzir as vibrações em uma ampla faixa de frequência. Uma outra vantagem deste modelo, em comparação com o modelo viscoso, é a sua simplicidade na construção. A metodologia geral introduzida no estudo de controle passivo de vibração foi possível com a ajuda dos conceitos de quantidade equivalente generalizada e a utilização de técnicas de otimização não linear. No espaço modal, consegue-se trabalhar apenas com um número reduzido de equações, permitindo, assim, reduzir o tempo computacional. Esta metodologia pode ser aplicada para qualquer modelo matemático do sistema primário, uma vez que suas características modais sejam encontradas.

A resposta do sistema composto, considerando os neutralizadores ótimos, resulta em uma curva que representa, com um alto grau de certeza, a realidade. Isto, porque a metodologia não desconsidera o amortecimento do sistema primário, no processo da procura dos neutralizadores ótimos (sintonização). Sempre que o amortecimento possa ser predito tão real quanto possível, os resultados obtidos também o serão. Como foi mostrado no capítulo V e no capítulo II, desprezar o amortecimento pode levar, não só a reduções no nível de vibrações que não serão compatíveis com a realidade, como também, a erros na sintonização.

Duas funções objetivos foram propostas e testadas fornecendo excelentes resultados: uma a partir do conhecimento do ponto de excitação e resposta (um coeficiente da matriz resposta em frequência do sistema primário + neutralizadores) e, a outra, a partir do vetor de coordenadas principais. Esta última resultou ser mais adequada, uma vez que, para problemas gerais de controle de banda larga onde vários modos podem ser encontrados, permite o uso de técnicas de otimização que precisam da informação da primeira derivada, tornando assim o processo de procura do ponto ótimo (neutralizadores ótimos) mais ágil. Uma escolha adequada nas variáveis de projeto é apresentada, permitindo ao operador a sensibilidade para aceitar ou não o ponto ótimo dado pelo programa de otimização.

A construção prática dos neutralizadores permitiu uma comparação entre os resultados teóricos e experimentais, quando fixados em uma placa de aço (capítulo VI). Esta comparação serviu para consolidar os conceitos que foram concebidos durante todo este trabalho.

Uma análise simples foi introduzida para prever a temperatura do material viscoelástico. Este ponto é muito importante devido a que um aumento de temperatura, dependendo das características destes materiais, pode produzir um funcionamento não ótimo dos neutralizadores.

Um modelo matemático, através de técnicas de elementos finitos, foi elaborado para prever a distribuição de temperatura no material viscoelástico, produto do calor interno gerado neste. Esta primeira aproximação, podendo ser aplicada a qualquer tipo de neutralizador, forneceu bons resultados. Ainda assim, o aprimoramento deste modelo é fundamental para futuros cálculos.

### 8.3 - Sugestões para Trabalhos Futuros

Como mencionado no item anterior, utilizou-se neutralizador simples para o controle de um sistema linear qualquer. Isto é, neutralizadores que só permitem deslocamento axial, ou rotacional (um grau de liberdade). Em problemas de vibrações por flexão, onde os graus de liberdade de rotação são relevantes, este tipo de neutralizador não será apropriado. Propõe-se, então, uma análise similar à realizada neste trabalho, para neutralizadores com dois graus de liberdade (neutralizador tipo viga). Ao invés de uma função impedância, na raiz do neutralizador, ter-se-á uma matriz de impedância. No sistema composto, devido ao uso deste tipo de neutralizadores, as matrizes modificadas terão grandezas generalizadas fora da diagonal. Espera-se, nestes casos, uma melhor eficiência, quando comparados com os neutralizadores utilizados neste trabalho, para sistemas onde os graus de liberdade de rotação não podem ser desprezados.

Uma análise mais detalhada, com respeito ao estudo da transferência de calor nos neutralizadores dinâmicos, poderá ajustar o modelo de elementos finitos e, assim, predizer com maior precisão a temperatura final do material viscoelástico. Esta análise deve considerar o regime transitório da transferência de calor uma vez que, quando o neutralizador seja solicitado, a geração de calor produzirá um aumento da temperatura do material viscoelástico e isto provocará uma diminuição da frequência natural. Este processo se repetirá várias vezes até chegar a um equilíbrio no regime permanente.

Se as características do sistema a controlar, ou as características do neutralizador viscoelástico, mudam com o tempo, a sintonização destes dispositivos perdem efetividade, podendo até piorar as condições iniciais onde não existia nenhum tipo de controle. Em tais situações é necessário que o controle seja realizado de tal forma que o dispositivo utilizado possa acompanhar estas mudanças e produzir, em todo momento, um controle ótimo. Tais técnicas são conhecidas como controle ativo de vibrações ou ruído, adquirindo uma grande importância com o advento dos super computadores e placas de aquisição de dados programáveis cada vez mais rápidas. Seria importante realizar algumas comparações entre controle ativo e passivo em banda larga, assim como também a implementação de um controle misto. Isto poderia ser realizado com filtros adaptativos para sistemas lineares ou redes neurais para sistemas altamente não lineares onde o modelo do sistema não é conhecido.

Foi explicado rapidamente, no capítulo V, que as funções objetivos aqui propostas podem conter mais de um mínimo na região de análise, quando, nesta, encontra-se mais de um modo de vibração. A utilização de técnicas de otimização não linear, quaisquer sejam estas, não garantem mínimo global na região de busca preestabelecida. Desta forma, podem ser encontrados pontos ótimos que fisicamente resolvam de maneira satisfatória, o problema particular de redução de vibrações em banda larga, mas que matematicamente não são os pontos ótimos globais. Uma técnica que permite achar estes ótimos globais, em uma certa região, é conhecida como algoritmo genético. A aplicação desta técnica, poderia aportar um melhor conhecimento da função objetivo proposta neste trabalho, como também, confiáveis resultados futuros quando a função for multimodal. Um programa híbrido entre algoritmo genético e técnicas de otimização não linear, permitiria adotar a melhor “performance” de cada um deles. Assim, através de uma curta excursão pelo programa conhecido como algoritmo genético resultaria em um ponto perto do mínimo global e posteriormente a convergência final poderia ser realizada através de técnicas de otimização não linear.

A utilização de técnicas de otimização não linear aplicada ao controle modo a modo, permitirá uma melhor versatilidade à metodologia proposta por Espindola e Silva (1992). Como mostrado no capítulo II este tipo de técnicas mostra um melhor desempenho para diferentes casos de amortecimento do sistema primário.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] - Allemang, R.J., Brown, D.L., 1987, "Experimental Modal Analysis and Dynamic Component Synthesis", Vol 3, Modal Parameter Estimation University Cincinnati, Ohio.
- [02] - Alvarenga, E.S., 1994, "Otimização de Neutralizadores Dinâmicos Tipo Pendular", Dissertação de Mestrado, UFSC, Santa Catarina.
- [03] - Arora, J.S., 1989, "Introduction to Optimum Design", McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- [04] - Asami, T., Momose, K., and Hosokawa, Y., 1993, "Approximate Expression for Design of Optimal Dynamic Absorbers Attached to Damped Linear Systems (Optimization Process Based on the Minimum Variance Criterion)", Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C, Vol. 59, pp. 2962-2967.
- [05] - Asami, T., Wakasono, T., Kameoka, K., Hasegawa, M., and Sekiguchi, H., 1991, "Optimum Design of Dynamic Absorbers for a System Subjected to Random Excitation", JSME International Journal Series, Vol. 34, pp. 218-226.
- [06] - Ayorinde, E.O., and Wharburton, G.B., 1980, "Minimizing Structural Vibrations with Absorbers", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 8, pp. 219-236.
- [07] - Bavastri, C.A., and Espíndola, J.J., 1995, "Modal Reduction of Vibration by Dynamic Neutralizers in a Frequency Range - A Generalized Approach", IV DINAME, Caxambú, Minas Gerais, Brasil.
- [08] - Bazan, F.S.V., and Bavastri, C.A., 1995, "An Optimized Pseudo-Inverse Algorithm in the Time Domain for Modal Parameter Identification and Model Reduction", IV DINAME, Caxambú, Minas Gerais, Brasil.
- [09] - Bazan, F.S.V., and Bavastri, C.A., 1995, "An Optimised Pseudo-Inverse Algorithm (OPIA) for Multi-Input Multi-Output Modal Parameter Identification", Mechanical System and Signal Processing, 10(4), 365-380.
- [10] - Bazaraa, M.S., Shetty, C.M., 1979, "Non Linear Programming", John Wiley & Sons.
- [11] - Björk, A., 1991, "Least Square Methods", Sweden, Linköping, University.
- [12] - Brown, D.L., Allemang, R.J., 1979, "Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis", Congress and Exposition Cabo Hall, Detroit, Febrary 26 - March 2.
- [13] - Carroll, C.W., 1959, "PhD Dissertation", Institute of Paper Chemistry, Appleton, Wisconsin.
- [14] - Den Hartog, J.P., 1956, "Mechanical Vibrations, McGraw-Hill, New York.
- [15] - Espíndola, J.J., 1985, "Apostila de Fundamentos de Vibrações", Curso de Pós - Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Santa Catarina.
- [16] - Espíndola, J.J., 1986, "Apostila de Dinâmica de Estruturas", Curso de Pós - Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Santa Catarina.
- [17] - Espíndola, J.J., 1987, "Apostila de Controle de Vibração", Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica (LVA), UFSC, Santa Catarina.
- [18] - Espíndola, J.J., 1990, "Design and Performance of Viscoelastic Isolators and Suspensions for Aeronautic Engines". FBB Report.
- [19] - Espíndola, J.J., Silva, H.P., 1992, "Modal Reduction of Vibrations by Dynamic Neutralizers: A General Approach", 10th International Modal Analysis Conference, San Diego, California, pp. 1367-1373.
- [20] - Espíndola, J.J., and Bavastri, C.A., 1995, "Reduction of Vibration in Complex Structures with Viscoelastic Neutralizers - A Generalized Approach", ASME, Boston.
- [21] - Ewins, D.J., 1984, "Modal Testing Theory and Practice", Research Studies Press LTD. England.

- [22] - Fiacco, A.V., Mc Cormick, G.P., 1964, "Management Sci", 10:360,601, 1966, 12:816.
- [23] - Frahm, H., 1911, "Device for Damping Vibrations of Bodies", U.S. Patent, 989,958.
- [24] - Golub, G.H., and Van Loan, C.F., 1989, "Matrix Computations", Baltimore, John Hopkins, University Press.
- [25] - Harris, C.M., Crede, C.H., 1976, "Shock and Vibration Handbook", McGraw Hill Company, New York, 1976.
- [26] - Himmelblau, D.M., 1972, "Applied Nonlinear Programming", McGraw Hill Book Company, USA.
- [27] - Hunt, J.B., 1979, "Dynamic Vibration Absorbers", Mechanical Engineering Publication LTD., London.
- [28] - ICATS, 1995, "Reference Manual", ICATS (Imperial College Analysis, Testing and Software), London.
- [29] - Jolly, M.R., and Sun, J.Q., 1994, "Passive Tuned Vibration Absorbers for Sound Radiation Attenuation from Panels", Proceeding of Smart Structures and Materials, SPIE, pp. 194-201.
- [30] - Jones, D.I.G., 1978, "A Reduced - Temperature Nomogram for Characterization of Damping Material Behaviour", Shock and Vibration Bulletin, 48.
- [31] - Juang, J.N., Pappa, R.S., 1985, "An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Modal Redaction", J. Guidance, Vol 8, N 5, pp 620-627, AIAA.
- [32] - Juang, J.N., Suzuki, H., 1988, "An Eigensystem Realization Algorithm in Frequency Domain for Modal Parameter Identification", ASME, 24/Vol 110.
- [33] - Kaljevic, I., Saigal, S., and Broome, Jr., T.H., 1993, "Dynamical Analysis of a General Mass-Spring Arrangement in Beam Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 163, pp. 67-81.
- [34] - King Jr., C.S., 1979, "Computerized and Graphic Representation of Viscoelastic Materials Property Data", Air Force Materials Library, Wright Patterson Air Force Base, Ohio.
- [35] - Kitis, L., 1983, "Vibration Reduction over a Frequency Range", Journal of Sound Vibration, 89 (4), 559-569.
- [36] - Kunieda, M., Chiba, T., and Kobayashi, H., 1987, "Positive Use of Damping Devices for Piping Systems-Some Experiences and New Proposals", Nuclear Engineering Design, Vol. 104, pp. 107-120.
- [37] - Lopes, E.M.O., 1989, "Estudo de Precisão do Método da Viga Vibrante Aplicado à Determinação das Propriedades Dinâmicas de Elastômeros", Dissertação de Mestrado, UFSC.
- [38] - Lopes, E.M.O., 1994, "Considerações sobre a Precisão do Método da Viga Vibrante", VI Congreso Nacional de Ingenieria Mecánica, Chile.
- [39] - Nashif, A.D., Jones, D.I.G, Henderson, J.P., 1985, "Vibration Damping", John Wiley & Sons.
- [40] - Özgüven, H.N., and Çandir, B., 1986, "Suppressing the First and Second Resonances of Beams by Dynamic Vibration Absorbers", Journal of Sound and Vibration, Vol. 111, pp. 377-390.
- [41] - Peterson, N.R., 1979, "Design of Large Scale Tuned Mass Dampers", Proceedings of the ASCE Convention and Exposition.
- [42] - Ramos, L.A.M., Zara, M.A., Dias, R.L.Z., 1986, "Termopares", Mercado Aberto, Porto Alegre, R.S.
- [43] - Rogers, C.L., and Nashif, A.D., 1978, "Computerized Processing and Empirical Representation of Viscoelastic Material Property Data and Preliminary Constrained Layer Damping Treatment Design", Shock and Vibration Bulletin, Sept. 1978, N 48, pp. 23-37.
- [44] - Rogers, L., 1981, "On Modeling Viscoelastic Behaviour", Shock and Vibration Bulletin, 51.



- [45] - Rossi, R.E., Laura, P.A.A., Avalos, D.R., and Larrondo, H., 1993, "Free Vibration of Timoshenko Beams Carrying Elastically Mounted, Concentrated Masses", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 165, pp. 209-223.
- [46] - Silva, H.P., 1991, "Controle Modal de Vibrações por Neutralizadores Dinâmicos: Uma Abordagem Generalizada", *Dissertação de Mestrado*, UFSC, Santa Catarina.
- [47] - Snowdon, J.C., 1968, "Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems", John Wiley & Sons, New York.
- [48] - Snowdon, J.C., 1966, "Vibration of Cantilever Beams to which Dynamic Absorbers are Attached", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol 39, N 5, Part 1, pp. 878-881.
- [49] - Snowdon, J.C., 1959, "Steady - State Behaviour of the Dynamic Absorber", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol 31, N 8, pp. 1096-1103.
- [50] - Snowdon, J.C., 1975, "Compound Mounting Systems that Incorporate Dynamic Vibration Absorbers", *Journal of Engineering for Industry*, Transaction of the Asme, November, 1204-1211.
- [51] - Sun, J.Q., Jolly, M.R. and Norris, M.A., 1995, "Passive, Adaptive and Active Tuned Vibration Absorbers - A Survey", *Transactions of the ASME*, 234 / Vol. 117, June.
- [52] - Wang, Y.Z., and Cheng, S.H., 1989, "Optimal Design of Dynamic Absorber in the Time Domain and the Frequency Domain", *Applied Acoustics*, Vol. 28, pp. 67-78.
- [53] - Warburton, G.B., and Ayorinde, E.O., 1980, "Optimum Absorber Parameters for Simple Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 8, pp. 197-217.
- [54] - Yamaguchi, M., Takasaki, K., and Hirooka, K., 1993, "Application of Dynamic Absorber for Shock-Applied Rolls", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, Vol. 59, pp. 2981-2985.
- [55] - Yamaura, H., Ono, K., and Toyota, K., 1993, "Optimal Tuning Method for Swing Reduction of Gondola Lift by an Inclined Pendulum-Type Dynamic Absorber", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, Vol. 59, pp. 3071-3077.
- [56] - Young, D., 1952, "The Theory of Dynamic Vibration Absorbers for Beams", *Proceedings, First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, ASME, pp. 91-96.
- [57] - Zhang, W, Matsuhisa, H, and Sato, S., 1990, "Dynamic Absorber for the General Multidegree-of-Freedom Vibration System (Theoretical Analysis)", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, Vol. 56, pp. 921-927.

# **ANEXO 1**

**QUANTIDADES EQUIVALENTES  
GENERALIZADAS –  
NEUTRALIZADOR SIMPLES**

## ANEXO 1: QUANTIDADE EQUIVALENTE GENERALIZADA - NEUTRALIZADOR SIMPLES

### A1.1 - Quantidades Equivalentes Generalizadas de um Neutralizador Simples

Um neutralizador simples, pode ser representado como um elemento composto por uma massa e um elemento resiliente, ver Figura A1.1.

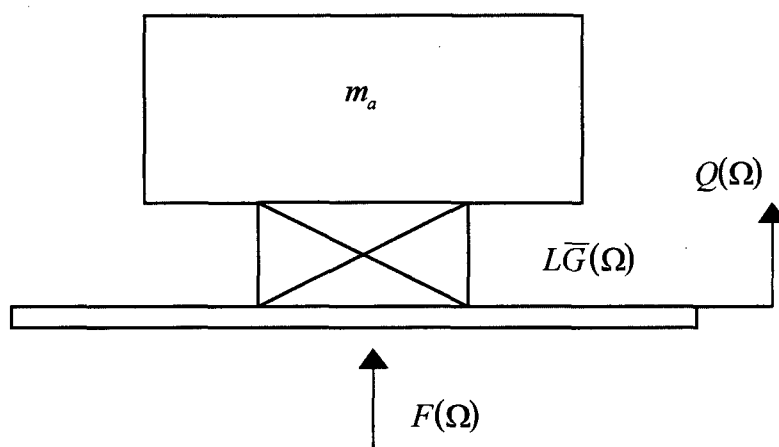


FIGURA A1.1- Neutralizador simples.

Fazendo uma análise no diagrama de corpo livre, pode-se achar a rigidez dinâmica na base do neutralizador.

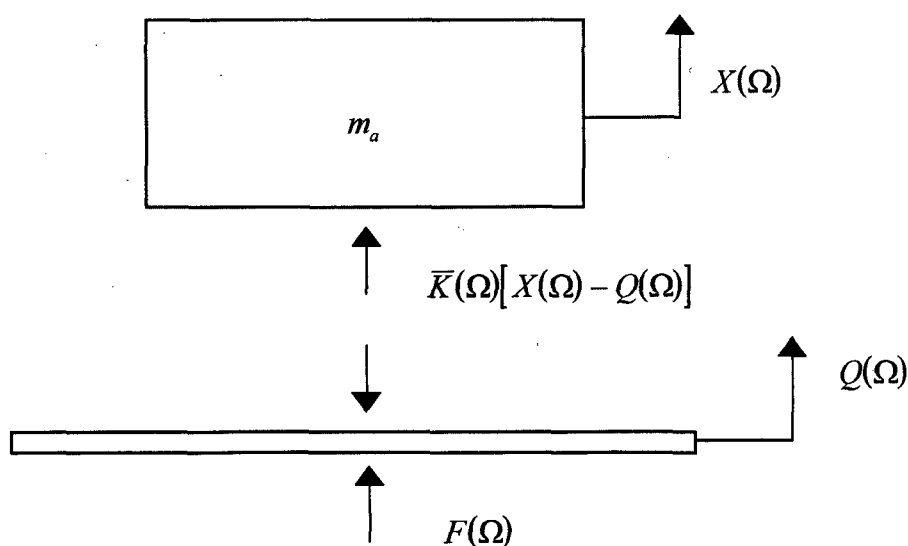


FIGURA A1.2 - Diagrama de corpo livre.

Da Figura A1.2 têm-se:

$$F(\Omega) = \bar{K}(\Omega)[Q(\Omega) - X(\Omega)] \quad (\text{A1.1.1})$$

$$-\Omega^2 m_a X(\Omega) + \bar{K}(\Omega)[X(\Omega) - Q(\Omega)] = 0 \quad (\text{A1.1.2})$$

Da equação (A1.1.2):

$$\bar{X}(\Omega) = \frac{\bar{K}(\Omega) Q(\Omega)}{K(\Omega) - \Omega^2 m_a}$$

Substituindo em (A1.1.1)

$$F(\Omega) = \bar{K}(\Omega) \left[ 1 - \frac{\bar{K}(\Omega)}{\bar{K}(\Omega) - \Omega^2 m_a} \right] Q(\Omega)$$

Definindo a rigidez dinâmica do neutralizador vista da base, como  $\bar{K}_a(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{Q(\Omega)}$  tem-se:

$$\bar{K}_a(\Omega) = \frac{\bar{K}(\Omega) \Omega^2 m_a}{\Omega^2 m_a - \bar{K}(\Omega)} \quad (\text{A1.1.3})$$

onde:

$$\bar{K}(\Omega) = L\bar{G}(\Omega)$$

$L$  é uma constante da peça elastomérica que depende da forma da mesma (denominado fator de forma).  $\bar{G}(\Omega)$  é módulo de cisalhamento complexo. Estes parâmetros podem ser obtidos experimentalmente ou de gráficos (Nashif, 1985).

Definindo a frequência de antirressonância de forma que o denominador de (A1.1.3) seja nulo, quando o amortecimento é desprezível:

$$m_a \Omega_a^2 - LG(\Omega_a) = 0$$

$$\Omega_a^2 = \frac{LG(\Omega_a)}{m_a} \quad (\text{A1.1.4})$$

Definindo  $LG(\Omega) = LG(\Omega_a) r(\Omega)$ , onde  $r(\Omega) = \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_a)}$ , a rigidez dinâmica na base do neutralizador fica:

$$\bar{K}_a(\Omega) = m_a \Omega^2 \frac{r(\Omega) [1 + i \eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega) [1 + i \eta(\Omega)]} \quad (\text{A1.1.5})$$

A relação entre a rigidez, massa e impedância dinâmica é dada por:

$$K(\Omega) = -\Omega^2 M(\Omega) = i\Omega Z(\Omega), \quad (\text{A1.1.6})$$

logo, a massa e a impedância dinâmica

$$M_a(\Omega) = -m_a \frac{r(\Omega) [1 + i\eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega) [1 + i\eta(\Omega)]} \quad (\text{A1.1.7})$$

e

$$Z_a(\Omega) = -im_a \Omega \frac{r(\Omega) [1 + i\eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega) [1 + i\eta(\Omega)]}. \quad (\text{A1.1.8})$$

Definem-se massa, amortecimento e rigidez generalizadas equivalentes como:

$$m_e(\Omega) = \Re(M_a(\Omega)) = \frac{\Im(Z_a(\Omega))}{\Omega} = \frac{\Re(K_a(\Omega))}{-\Omega^2}, \quad (\text{A1.1.9})$$

$$c_e(\Omega) = \Re(Z_a(\Omega)) = \frac{\Im(K_a(\Omega))}{\Omega} = -\Omega \Im(M_a(\Omega)), \quad (\text{A1.1.10})$$

$$k_e(\Omega) = \Re(K_a(\Omega)) = -\Omega \Im(Z_a(\Omega)) = -\Omega^2 \Re(M_a(\Omega)). \quad (\text{A1.1.11})$$

Substituindo (A1.1.5), (A1.1.7) e (A1.1.8) em (A1.1.9), (A1.1.10) e (A1.1.11) tem-se:

$$k_e(\Omega) = \Omega^2 m_a \frac{r(\Omega) \{ \varepsilon_a^2 - r(\Omega) [1 + \eta^2(\Omega)] \}}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega) \eta(\Omega)]^2} \quad (\text{A1.1.12})$$

$$m_e(\Omega) = -m_a \frac{r(\Omega) \{ \varepsilon_a^2 - r(\Omega) [1 + \eta^2(\Omega)] \}}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega) \eta(\Omega)]^2} \quad (\text{A1.1.13})$$

$$c_e(\Omega) = m_a \Omega_a \frac{r(\Omega) \eta(\Omega) \varepsilon_a^2}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega) \eta(\Omega)]^2} \quad (\text{A1.1.14})$$

Das equações (A1.1.9) a (A1.1.11) é fácil provar que :

$$\begin{aligned} K_a(\Omega) &= -\Omega^2 m_e(\Omega) + i\Omega c_e(\Omega) \\ K_a(\Omega) &= k_e(\Omega) + i\Omega c_e(\Omega) \end{aligned} \quad (\text{A1.1.15})$$



$$M_a(\Omega) = m_e(\Omega) + \frac{c_e(\Omega)}{i\Omega} \quad (A1.1.16)$$

$$M_a(\Omega) = -\frac{k_e(\Omega)}{\Omega^2} + \frac{c_e(\Omega)}{i\Omega}$$

$$Z_a(\Omega) = c_e(\Omega) + i\Omega m_e(\Omega)$$

$$Z_a(\Omega) = c_e(\Omega) + \frac{k_e(\Omega)}{i\Omega} \quad (A1.1.17)$$

Pode-se fazer uma interpretação gráfica, mostrando a equivalência dinâmica entre um sistema qualquer (cujas características dinâmicas podem ser representadas por  $K_a(\Omega)$ ,  $Z_a(\Omega)$  ou  $M_a(\Omega)$ ) e um sistema composto por parâmetros equivalentes generalizados, ver Figura A1.3. Esta equivalência é muito importante no desenvolvimento deste trabalho. Como mostrado no capítulo II, trabalhando com o sistema formado por estes parâmetros generalizados, o sistema composto pode ser equacionado com as coordenadas generalizadas do sistema primário apenas.

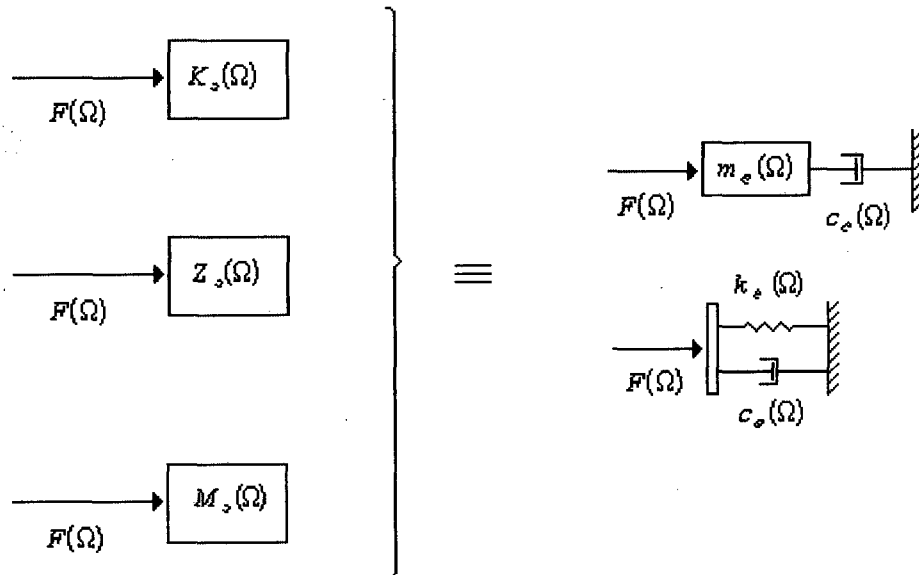


FIGURA A1.3 - Equivalência entre um sistema qualquer e um sistema formado por parâmetros equivalentes generalizados.

## **ANEXO 2**

**COMPARAÇÃO ENTRE SISTEMAS  
SIMPLES, AMORTECIMENTO  
VISCOSO E VISCOELÁSTICO**

## ANEXO 2: COMPARAÇÃO ENTRE SISTEMAS SIMPLES, AMORTECIMENTO VISCOSO E VISCOELÁSTICO

### A2.1 - Relação entre Modelo Viscoso e Modelo Viscoelástico

Considerem-se os seguintes tipos de sistemas simples, um composto por material viscoelástico geral e outro com amortecimento viscoso, como mostrado na Figura A2.1:

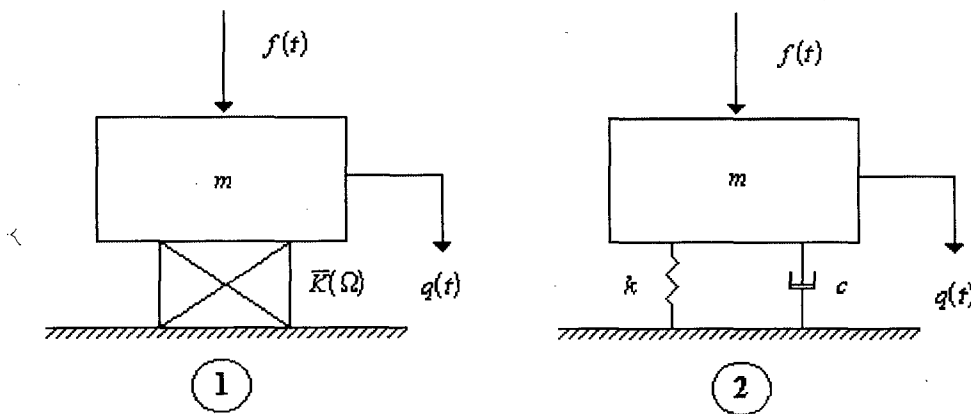


FIGURA A2.1: 1-Sistema simples modelo viscoelástico 2-Modelo amortecimento viscoso.

#### A2.1.1 - Modelo Viscoelástico

A equação de movimento do modelo viscoelástico no domínio do tempo, conhecida por alguns autores como inequação já que suas características são definidas no domínio da frequência, é dada por:

$$m \ddot{q}(t) + \bar{K}(\Omega) q(t) = f(t) \quad (\text{A2.1.11})$$

No domínio da frequência tem-se:

$$(\bar{K}(\Omega) - m \Omega^2) Q(\Omega) = F(\Omega) \quad (\text{A2.1.1.2})$$

ou

$$\frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{(\bar{K}(\Omega) - m \Omega^2)} \quad (\text{A2.1.1.3})$$

$\bar{K}(\Omega)$  pode-se expressar como:

$$\bar{K}(\Omega) = K(\Omega) (1 + i \eta(\Omega)) \quad (\text{A2.1.1.4})$$

onde:

$K(\Omega)$  é a rigidez dinâmica e  $\eta(\Omega)$  é o fator de perda.

A equação (A2.1.1.3) fica:

$$\frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{K(\Omega) - m \Omega^2 + i \eta(\Omega) K(\Omega)} \quad (\text{A2.1.1.5})$$

Multiplicando e dividindo por  $K(\Omega)$  tem-se:

$$\frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{\frac{1}{K(\Omega)}}{1 - \frac{m \Omega^2}{K(\Omega)} + i \eta(\Omega)} \quad (\text{A2.1.1.6})$$

Com a frequência de ressonância  $\Omega_a^2 = \frac{\bar{K}(\Omega_a)}{m_a}$  (frequência de antirressonância de um

neutralizador simples, capítulo III) e a relação de rigidez  $r(\Omega) = \frac{K(\Omega)}{K(\Omega_a)}$  a equação (A2.1.1.6)

fica:

$$\frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{\frac{1}{K(\Omega)}}{1 - \frac{\Omega^2}{r(\Omega) \Omega_a^2} + i \eta(\Omega)}$$

$$\frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{\frac{1}{K(\Omega)}}{1 - \frac{\varepsilon_a^2}{r(\Omega)} + i \eta(\Omega)} \quad (\text{A2.1.1.7})$$

$$\frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{r(\Omega)}{\left[ r(\Omega) - \varepsilon_a^2 + i \eta(\Omega) r(\Omega) \right]} \quad (\text{A2.1.1.8})$$

$$\left| \frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} \right| = \frac{r(\Omega)}{\sqrt{\left[ (r(\Omega) - \varepsilon_a^2)^2 + (\eta(\Omega) r(\Omega))^2 \right]}} \quad (\text{A2.1.1.9})$$

A equação (A2.1.1.9) representa a resposta em frequência (receptância) adimensional do sistema simples.

**A2.1.2 - Modelo Viscoso**

O sistema de equações para este tipo de modelo é:

$$m\ddot{q}(t) + k q(t) + c\dot{q}(t) = f(t) \quad (\text{A2.1.2.1})$$

No domínio da frequência tem-se:

$$\begin{aligned} [-\Omega^2 m + k + i \Omega c] Q(\Omega) &= F(\Omega) \\ \frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} &= \frac{1}{[-\Omega^2 m + k + i \Omega c]} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.2.2})$$

Tendo-se presente que:

$$\begin{aligned} c &= 2 \xi_a m_a \Omega_a \\ e \\ \varepsilon_a &= \frac{\Omega}{\Omega_a} \\ \frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} &= \frac{\frac{1}{k}}{[-\varepsilon_a^2 + 1 + i 2 \xi_a \varepsilon_a]} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.2.3})$$

$$\left| \frac{Q(\Omega)}{F(\Omega)} \right| = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{[1 - \varepsilon_a^2]^2 + (2 \xi_a \varepsilon_a)^2}} \quad (\text{A2.1.2.4})$$

Fazendo-se uma comparação entre as equações (A2.1.1.9) e (A2.1.2.4), conclui-se que, para particularizar o caso de sistemas viscoelásticos gerais para sistemas viscosos, devem-se adotar os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} r(\Omega) &= 1 \\ e \\ \eta(\Omega) &= 2 \xi_a \varepsilon_a. \end{aligned}$$

Se o neutralizador simples é do tipo viscoelástico na zona de transição, ver capítulo II, supõe-se que a rigidez  $K(\Omega)$  seja proporcional à frequência, adotando:

$$\begin{aligned} r(\Omega) &= \varepsilon_a \\ e \\ \eta(\Omega) &= \eta = cte. \end{aligned}$$

## **ANEXO 3**

### **LEVANTAMENTO DAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DE UM MATERIAL VISCOELÁSTICO**



### ANEXO 3: LEVANTAMENTO DAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DE UM MATERIAL VISCOELÁSTICO.

Este Anexo apresenta os conceitos básicos e os passos necessários para a obtenção das características dinâmicas (módulo de cisalhamento e fator de perda) de um material viscoelástico, em forma experimental. Estas características são fundamentais, já que possibilitam a construção dos neutralizadores dinâmicos desenvolvidos nesta tese, corroborando, assim, os conceitos teóricos e as técnicas numéricas implementadas.

Faz-se uma revisão dos conceitos básicos de variáveis reduzidas e método de vigas vibrantes (camada única e viga sanduíche).

Apresentam-se os dados experimentais e os conceitos necessários para os ajustes do fator de perda e do módulo de cisalhamento.

#### A3.1 - Método das Variáveis Reduzidas

Antigamente, várias curvas eram necessárias para representar os dados experimentais, características dinâmicas dos materiais viscoelásticos, uma vez que estes dependem da temperatura e da frequência. Para realizar uma caracterização completa das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos, dentro de um gráfico único, surgiu o método das variáveis reduzidas. Como mostrado no capítulo I, existe uma relação entre as dependências dos materiais viscoelásticos em temperatura e frequência. A frequência influi qualitativamente de maneira inversa à temperatura, sobre as propriedades dinâmicas, a menos de um fator de escala (Nashif, 1985, Snowdon, 1968).

O método das variáveis reduzidas parte do princípio de que, assumidas certas hipóteses, tal relação pode ser equacionada de forma simples e satisfatória. Assim, o módulo dinâmico e o fator de perda podem ser escritos como (Nashif, 1985):

$$\begin{aligned} G(\Omega, T) &= \left( \frac{T\rho}{T_0\rho_0} \right) G_0(\Omega\alpha_T) \\ \eta_G(\Omega, T) &= \eta_{G_0}(\Omega\alpha_T) \end{aligned} \quad (\text{A3.1.1})$$

sendo  $\alpha_T$  um fator deslocamento em frequência equivalente à alteração de temperatura  $T$  para  $T_0$  (onde  $T_0$  é a temperatura de referência e  $T$  a variável temperatura).

A equação (A3.1.1) significa que o módulo dinâmico  $G$  medido na frequência  $\Omega$  e temperatura  $T$  é equivalente ao módulo dinâmico  $G_0$  medido à frequência  $\Omega\alpha_T$  e à temperatura  $T_0$ . Segundo Nashif (1985), as razões  $T/T_0$  e  $\rho/\rho_0$  podem ser consideradas como unitárias, sendo assim, (A3.1.1) fica:

$$\begin{aligned} G(\Omega, T) &= G_0(\Omega\alpha_T) \\ \eta_G(\Omega, T) &= \eta_{G_0}(\Omega\alpha_T). \end{aligned} \quad (\text{A3.1.2})$$

Isto possibilita a construção de um gráfico com duas curvas apenas (Lopes, 1989), curvas mestres, em função de uma variável única ( $\Omega\alpha_T$ ) chamada frequência reduzida.

Isto facilita o tratamento dos pontos obtidos experimentalmente que serão mostrados neste anexo.

O fator  $\alpha_T$  surge da comparação de diversos experimentos, chegando-se a uma curva universal em função de  $T - T_0$  como mostrado em Rogers (1981), Rogers e Nashif (1981), Jones (1978), King (1979).

$$\log \alpha_T = \frac{-12(T - T_0)}{291.7 + (T - T_0)} \quad (\text{A3.1.3})$$

Deve-se destacar a importância da escolha de  $T_0$ . Uma escolha adequada desta temperatura permitirá dispersão mínima nos pontos experimentais. Uma vez realizado o experimento, valores para o módulo de cisalhamento e para o fator de perda serão encontrados em função de

$$F_R = \Omega \alpha_T. \quad (\text{A3.1.4})$$

O próximo passo é achar uma função que represente da melhor forma possível esses. Isto é conseguido usando conceitos de álgebra linear ou com processos iterativos de técnicas de otimização não linear, como será mostrado posteriormente. Como explicado anteriormente, existirá um  $T_0$  para o qual essa dispersão toma um valor mínimo. Sendo assim o processo de ajuste entre a nuvem de pontos experimental e uma função conhecida, escolhida para tal fim, procurará também a temperatura de referência mais adequada. Todos estes conceitos serão mostrados no item A3.6 (ajuste de curvas) deste anexo.

As curvas obtidas poderão ser apresentadas em um nomograma onde, além de uma escala de frequência reduzida, ter-se-á também, uma escala para temperatura e uma outra para frequência permitindo a leitura direta e simples das características dinâmicas do material elastomérico, ver figura A3.1. É importante ressaltar que todas as escalas da figura A3.1 são logarítmicas.

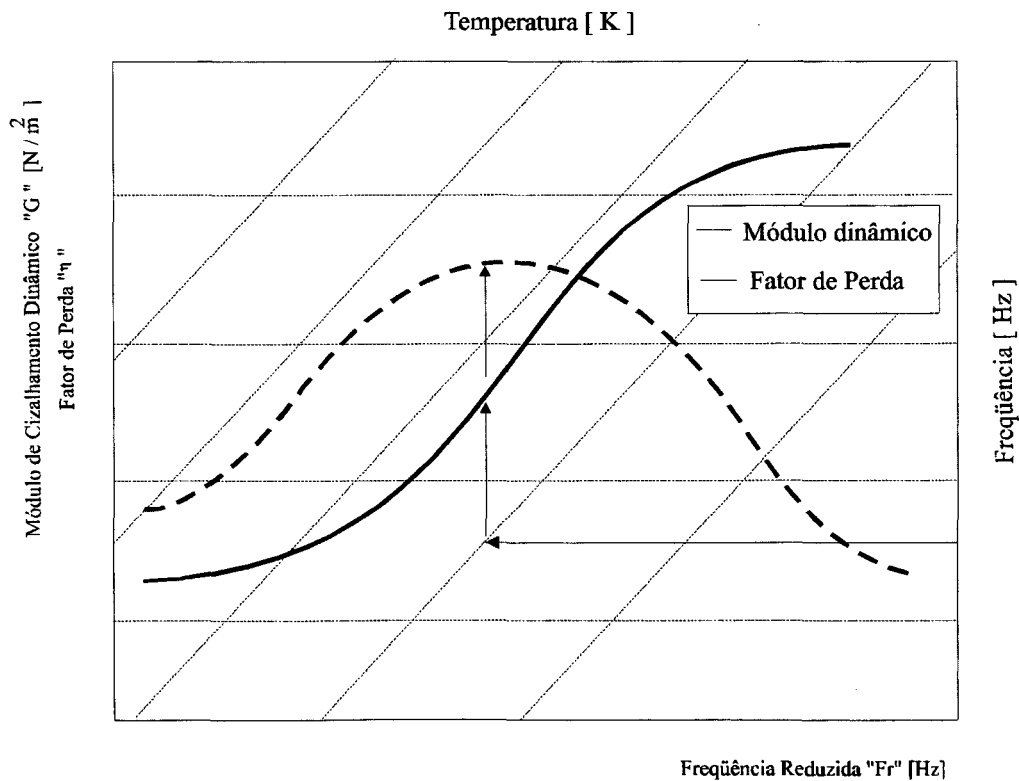


FIGURA A3.1 - Nomograma para fator de perda e módulo dinâmico

Segundo Lopes (1989): - é necessário uma grande faixa de frequência para refletir a mesma alteração de comportamento produzido por uma faixa estreita em temperatura. Este fenômeno, junto com o conceito de variável reduzida, permite achar as características dentro uma certa faixa de temperatura e transformá-las em uma grande faixa no domínio da frequência. Em controle de ruído e vibrações o conhecimento das características dinâmicas de um material viscoelásticos é muito importante como pode ser visto ao longo deste trabalho.

### A3.2 - Método da Viga Vibrante

Existem diversos métodos para determinar as propriedades dinâmicas de uma material viscoelástico. O método da viga vibrante padronizada pela norma ASTM 756-83 é o mais difundido. Este, limitado à obtenção de dados na faixa de comportamento linear dos materiais sob ensaio, caracteriza-se pela sua simplicidade de utilização, cobrindo uma ampla gama de frequências (50 a 5000 Hz). Este método, implementado em Lopes (1989) e utilizado neste trabalho, conta com as vantagens de simplicidade, eficácia e um estudo minucioso no que diz respeito às variáveis estatísticas do processo.

As vigas vibrantes encontradas na literatura são mostradas na figura A3.2.

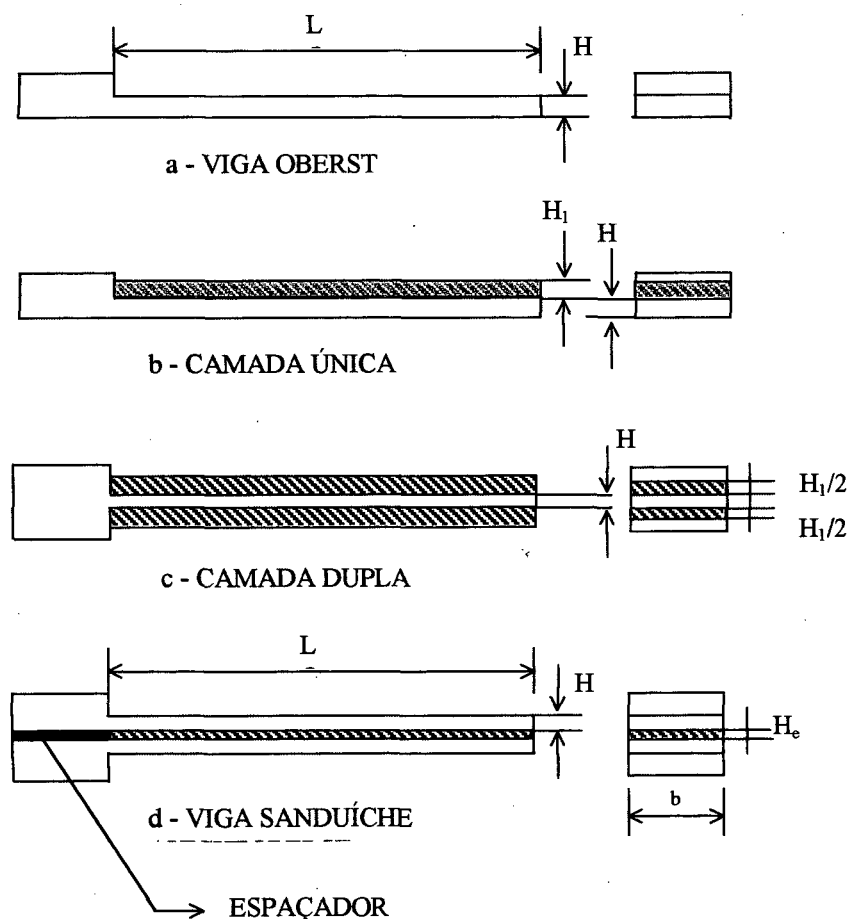


FIGURA A3.2 - Vigas vibrantes propostas pela norma ASTM 756-83.

Basicamente o método consiste em medir frequências naturais e fatores de perdas das vigas compostas, segundo a cadeia de medição mostrada na figura A3.3 e, posteriormente, através de uma formulação simples, acha-se as características dinâmicas do material viscoelástico.

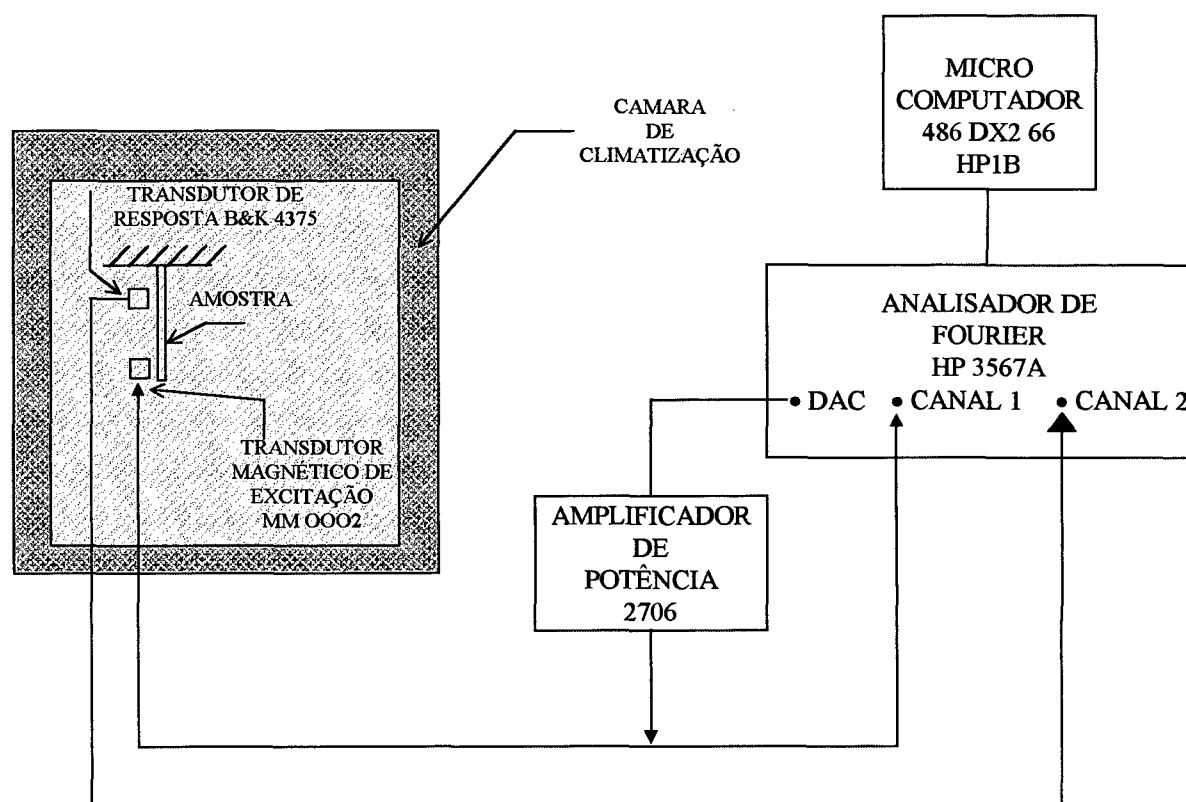


FIGURA A3.3 - Cadeia experimental.

Dentre os métodos da viga vibrante propostos por norma (ver figura A3.2), os seguintes, foram implementados devido às características do material e à infra-estrutura existente no laboratório:

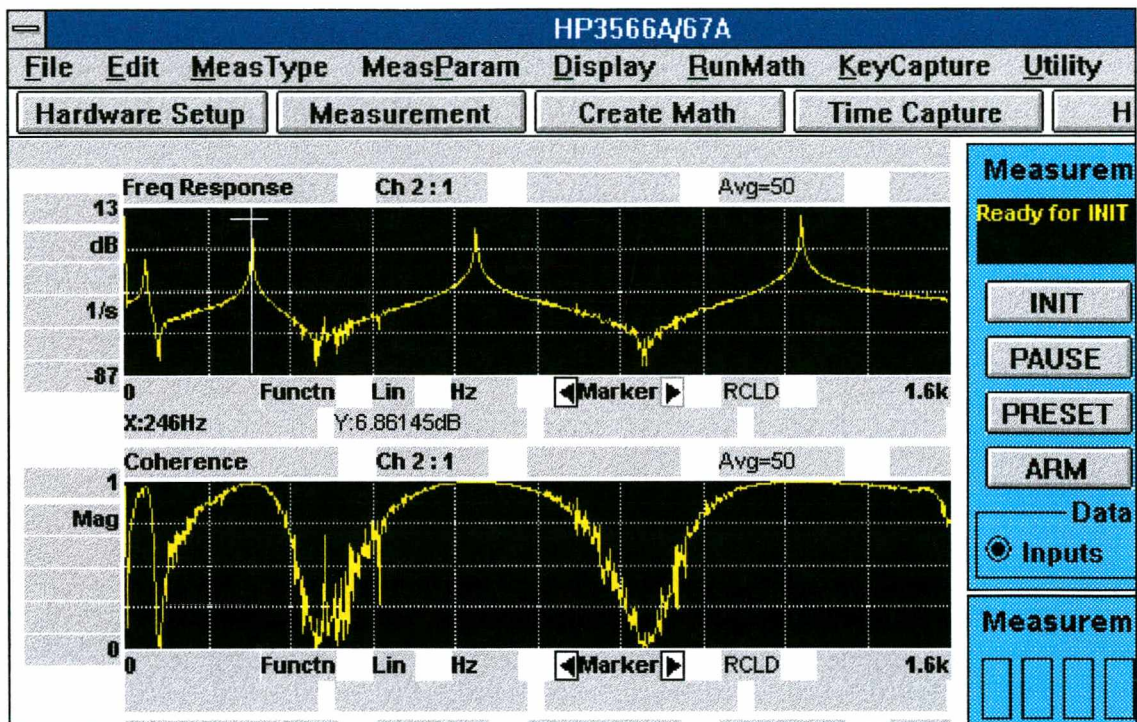
- camada única
- viga sanduíche.

No primeiro, o fator de perda do sistema composto (lâmina metálica externa + material elastomérico) foi da ordem do fator de perda da lâmina metálica. O baixo amortecimento produzido pela viga de camada única pode levar a cometer erros, quando se tentar calcular o fator de perda do material viscoelástico. O mecanismo de dissipação da energia produzido ao flexionar a viga (tração - compressão sobre o material viscoelástico) produz um amortecimento muito baixo geralmente. Na figura A3.4 estão presentes as respostas em frequência da lâmina metálica e da viga com camada única podendo-se observar este fenômeno.

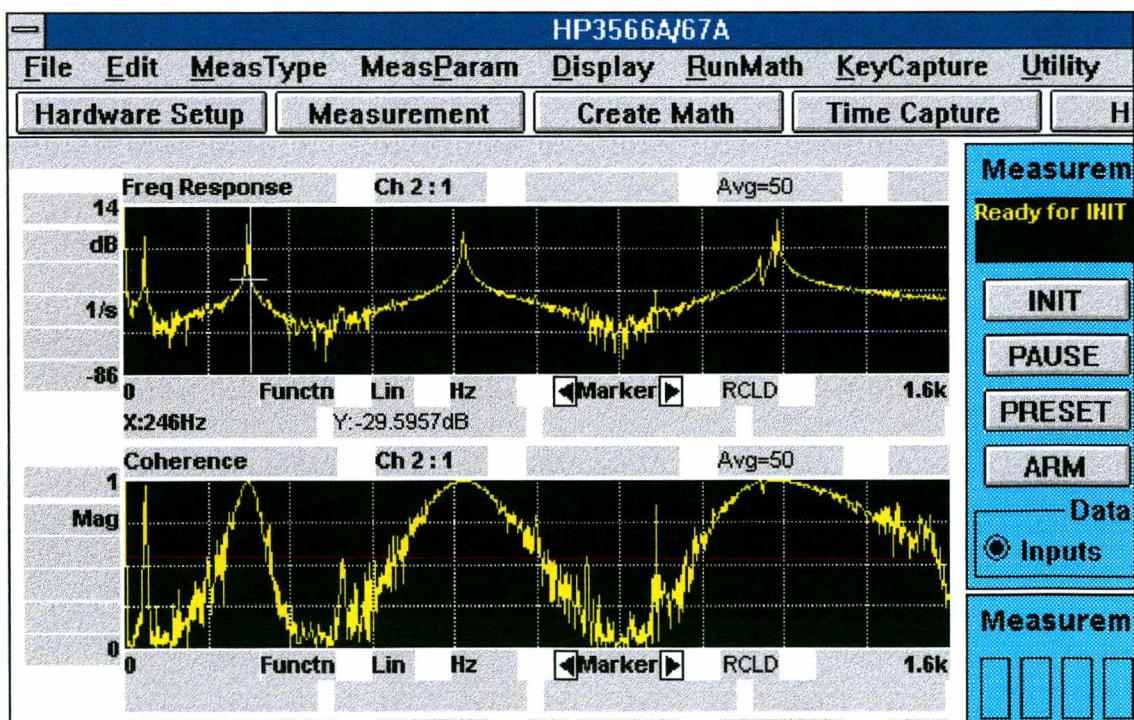
Por esta razão optou-se pela viga tipo sanduíche. Neste caso, o material elastomérico trabalha a cisalhamento quando a viga sofre deformações de flexão, provocando, assim, um fator de perda elevado, favorecendo sua identificação. Na figura A3.5, mostra-se uma resposta típica de uma viga sanduíche de iguais dimensões da viga com camada única. Pode-se observar, comparando as figuras A3.4 e A3.5, a grande dissipação de energia produzida quando se trabalha com viga



sanduíche. Ambos ensaios foram feitos à temperatura ambiente (aproximadamente 20 graus Celsius) e nas mesmas condições.



a) Resposta da lâmina metálica do neutralizador número 1



b) Resposta da viga com camada única do neutralizador número 1

FIGURA A3.4 - Resposta em frequência



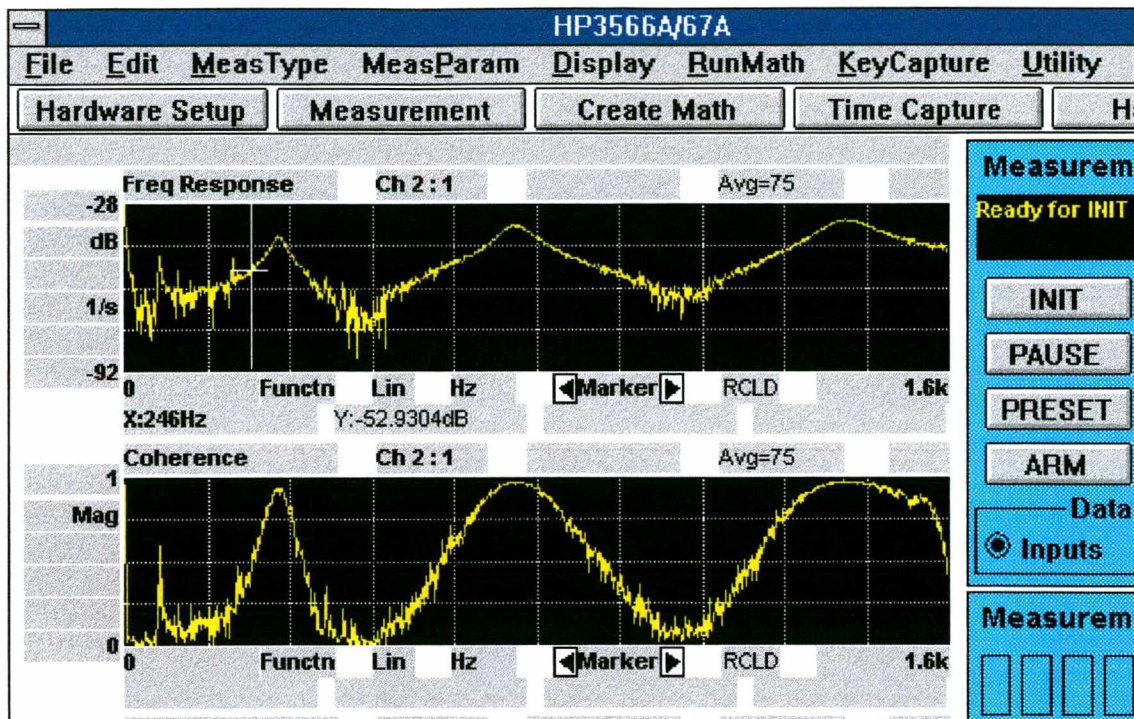


FIGURA A3.5 - Resposta em frequência da viga sanduíche número 1.

### A3.3 - Formulário para Cálculo das Propriedades Dinâmicas

Para viga sanduíche, as propriedades dinâmicas do elastômero são dadas por (ASTM 756-83):

$$G = \frac{(A - B) - 2(A - B)^2 - 2(A\eta_s)^2}{(1 - 2A + 2B)^2 + 4(A\eta_s)^2} \frac{2\pi C_n E H H_e}{L^2} \quad (\text{A3.3.1})$$

$$\eta_2 = \frac{A \eta_s}{(A - B) - 2(A - B)^2 - 2(A\eta_s)^2} \quad (\text{A3.3.2})$$

- |          |   |   |
|----------|---|---|
| $G$      | = | módulo dinâmico de cisalhamento do elastômero [ Pa ];   |
| $E$      | = | módulo de Young do metal base da viga sanduíche [ Pa ];   |
| $f_n$    | = | frequência de ressonância do n-ésimo modo de uma viga Oberst engastada, lâmina metálica externa da viga sanduíche [ Hz ]; |
| $f_s$    | = | frequência de ressonância correspondente ao s-ésimo modo da viga sanduíche engastada [ Hz ];                              |
| $\eta_s$ | = | fator de perda da viga sanduíche [ adimensional];   |
| $\eta_2$ | = | fator de perda do elastômero [ adimensional];   |
| $H_e$    | = | espessura do elastômero [ m ];  |
| $H$      | = | espessura da lâmina metálica da viga sanduíche [ m ];   |



$$T = \frac{H_e}{H} \text{ razão de espessuras;}$$

$$L = \text{comprimento de viga sanduíche [ m ];}$$

$$\rho_e = \text{densidade do elastômero [ Kg / m}^3 \text{ ]};$$

$$\rho = \text{densidade da lâmina metálica da viga sanduíche [ Kg / m}^3 \text{ ]};$$

$$D = \frac{\rho_e}{\rho};$$

$$A = \left( \frac{f_s}{f_n} \right)^2 (2 + D T) \left( \frac{B}{2} \right); \quad (\text{A3.3.3})$$

$$B = \frac{1}{6(1 + T)^2}; \quad (\text{A3.3.4})$$

$$C_n = \text{coeficiente do n-ésimo modo da lâmina metálica engastada.}$$

$$C_1 = 0.55959$$

$$C_2 = 3.5069$$

$$C_3 = 9.8194$$

$$C_4 = 19.242$$

$$C_5 = 31.809$$

Recomenda-se que  $E$  e  $f_n$  sejam levantados experimentalmente. Considerando como viga Oberst, as lâminas metálicas externas da viga sanduíche, o módulo de elasticidade é dado por:

$$E = \frac{12 \rho L^4 f_n^2}{H^2 C_n^2} \quad (\text{A3.3.5})$$

### A3.3.1 - Considerações para Realizar o Ensaio

- na derivação das equações (A3.3.1) e (A3.3.2) supõe-se que a viga sanduíche apresenta modos senoidais de vibração, típicos de viga simplesmente apoiada. No caso de viga engastada essa premissa só pode ser tomada como razoável, para os modos de ordem superior ao primeiro.
- Esta derivação baseia-se na hipótese de que a viga sanduíche é constituída por três lâminas totalmente interligadas. Na prática, utiliza-se uma substância que torne possível a adesão do elastômero às lâminas metálicas. A película dessa substância deve ser fina comparada com as outras espessuras, tanto da lâmina metálica quanto do material viscoelástico e, a rigidez, bem superior àquela que se deseja medir.
- Todas as medições experimentais devem situar-se na faixa linear. Isto implica não só no controle do sinal de excitação, mas também na desconsideração do primeiro modo de vibração, uma vez que este possui grandes amplitudes e um significativo desvio do modo senoidal.
- Segundo a análise estatística (Lopes, 1994), evidencia-se a necessidade de se ensaiar 11 vigas para garantir um intervalo de confiança de 90% e 7 vigas sanduíche para um intervalo de 80%. Utilizou-se neste trabalho, por razões de economia do material elastomérico, 7 vigas sanduíche.

## A3.4 - Ensaio Experimental

Observações de várias ressonâncias da viga engastada - livre em um dispositivo adequado e convenientemente excitado (ver figura A3.3), indica o efeito da frequência sobre as propriedades dinâmicas. Inserindo a viga e o dispositivo em uma câmara de climatização, torna-se possível a variação da temperatura de ensaio com o conseqüente exame do efeito dessa variável. Assim sendo, ambas variáveis (frequência e temperatura) são reproduzidas para se obter as características dinâmicas de um material viscoelástico.

O ensaio consta basicamente de duas etapas: a parte experimental aonde são encontradas, via identificação de parâmetros, as frequências naturais e o fator de perda das vigas sanduíche utilizadas juntamente com as medidas geométricas da mesma; a parte numérica, aonde as expressões (A3.3.1) e (A3.3.2) são usadas para determinar as características dinâmicas do material a ensaiar.

### A3.4.1 - Material a Ensaiar

O material a ensaiar foi o mesmo utilizado em Alvarenga (1994). O nome comercial é Dyad 601, fabricado por "Soundcoat". As características deste material podem ser encontradas em Nashif (1985). Mesmo assim, a corroboração das mesmas daria uma maior segurança na parte experimental.

### A3.4.2 - Viga Sanduíche

A viga sanduíche, como explicado anteriormente, consta de duas lâminas metálicas de aço 1020 e um material viscoelástico cujas características deseja-se determinar.

As lâminas metálicas foram retificadas nas instalações da UFSC (Setor de máquinas ferramentas) e suas dimensões são mostradas na tabela A3.1. Essas medidas foram realizadas na Fundação CERTI, que conta com os equipamentos apropriados de metrologia, assim como as técnicas para realizar as mesmas.

O material viscoelástico, disposto em fitas, foi cortado a uma largura igual às lâminas metálicas e coladas com Araldite 24 hs. A colagem foi acelerada com calor, com a ajuda da câmara de climatização, a uma temperatura de 50 graus Celsius. Cuidados foram tomados para que a colagem não ficasse distorcida nem porosa. Para isto, grampos foram colocados ao longo da viga. As dimensões das lâminas metálicas e a espessura da cola, comparadas com o material viscoelástico, estão dentro de normas. As vigas foram confeccionadas de forma artesanal.

A figura A3.6 e a tabela A3.1 mostram, respectivamente, a viga sanduíche e as dimensões principais.

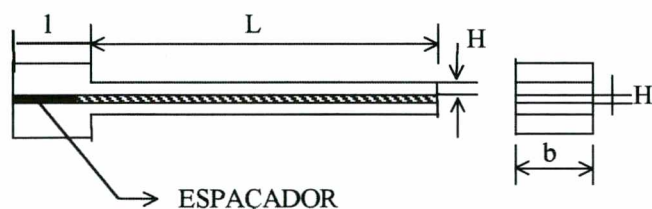


FIGURA A3.6 - Viga sanduíche



TABELA A3.1 - Dimensões da viga sanduíche

N de viga	L [mm]	l [mm]	H - lâmina 1 [mm]	H - lâmina 2 [mm]	b [mm]
1	211.85	24.5	2.14567	2.1448	11.97025
2	211.70	24.5	2.128333	2.136	11.938
3	211.85	24.5	2.146666	2.1493	11.94275
4	211.60	24.5	2.146666	2.1505	12.01275
5	211.95	24.5	2.145	2.1408	11.9635
6	211.8	24.5	2.140666	2.1368	11.9895
7	211.9	24.5	2.148333	2.1381	11.98225

O outro parâmetro importante a ser determinado, densidade do elastômero, foi obtido experimentalmente através da relação entre a sua massa e o seu volume. Com uma amostra de dimensões conhecidas calcula-se seu volume:

$$Vol = 0.6845 \cdot 0.0005 \cdot 0.006 = 8.8985 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

A massa foi calculada com ajuda de uma balança de precisão, marca Marte AM 5500 (0.01 gramas), cedida pelo laboratório de Termodinâmica. O valor médio de dez (10) medições foi:

$$m_2 = 10.237 \cdot 10^{-3} \text{ Kg}$$

A densidade, definida como a relação entre a massa e o volume, fica então:

$$\rho_2 = \frac{m_2}{Vol} = 1150.475 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

### A3.4.3 - Esquema do Ensaio

A cadeia de medição está esquematizada na figura A3.3. Um “software” faz a comunicação entre uma placa HPIB e o analisador de Fourier HP 3567A de dez (10) canais, permitindo uma fácil manipulação do ensaio e também, ampla variedade de análises e excitações. A viga engastada - livre é colocada em uma câmara de climatização (-30 a 60 graus centígrados) com precisão de  $\pm 1$  grau.

O excitador é um transdutor eletromagnético MM 0002 (Brüel & Kjaer) com uma faixa de frequência útil de 0 a 2000 Hz. O medidor de resposta é um acelerômetro Brüel & Kjaer 4375 colocado próximo ao engaste para evitar influências da massa do mesmo nas características da viga sanduíche.

A excitação adotada foi um sinal “Chirp” de 0 a 1600 Hz, devido às limitações do excitador eletromagnético, que passa por um amplificador de potência tipo 2706 da Brüel & Kjaer. Esta saída vai tanto para o canal 1 do analisador quanto para o transdutor eletromagnético que se encontra no extremo livre da viga (excitador). Na figura A3.6 pode-se observar a excitação ao longo da faixa de frequência.

Utilizou-se 800 linhas espectrais com uma precisão em frequência de 2 Hz. Diferentes números de médias foram tomados (30, 50 e 75) sem observar grandes variações na resposta em frequência. Adotou-se 75 médias para a maioria dos ensaios.

Uma análise de resposta em frequência foi realizada tanto para as lâminas metálicas quanto para as vigas sanduíche achando-se, em todo momento, uma boa coerência nas medições (ver figuras A3.4 e A3.5). A partir da resposta em frequência pode-se extrair parâmetros modais como frequências naturais e fator de perda. Uma curva característica de resposta em frequência é mostrada na figura A3.7.

Nas vigas sanduíche, a resposta em frequência foi medida para diferentes temperaturas a partir de -30 até 60 graus centígrados com um intervalo de 10.

#### A3.4.4 - Módulo de Young e Frequências Naturais das Vigas Metálicas

Respeitando o estabelecido por norma, no que diz respeito aos valores tomados para o módulo de Young e frequência natural das lâminas metálica externas a viga sanduíche, ensaios experimentais foram conduzidos. A partir da resposta em frequência de uma viga Oberst (lâmina metálica), estes parâmetros podem ser extraídos. A frequência, por visualização simples da resposta das vigas e o módulo de Young, através da expressão (A3.5). Isto pode ser realizado para os diferentes modos encontrados na faixa de frequência. Basta apenas variar o índice  $n$  da expressão (A3.5).

A figura A3.7 mostra a resposta em frequência da lâmina metálica número 3 quando ensaiada segundo o esquema mostrado na figura A3.3, à temperatura ambiente (aproximadamente 20 graus Celsius).

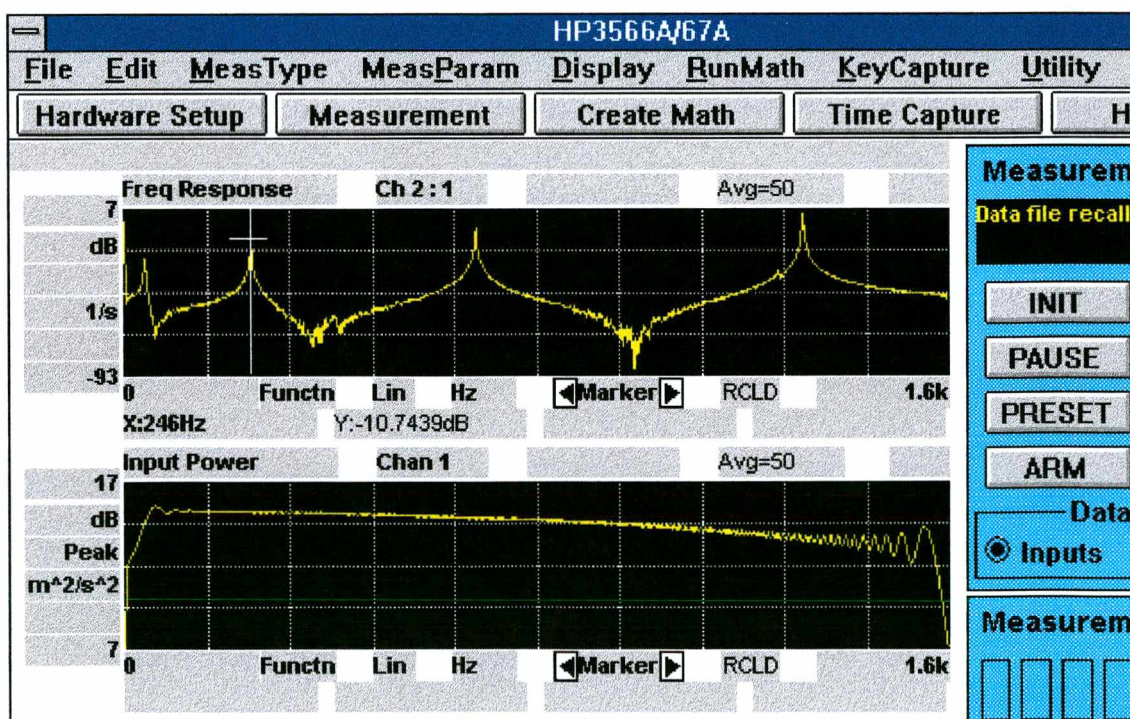


FIGURA A3.7 - Resposta em frequência da lâmina metálica número 3



A tabela A3.2 mostra os resultados experimentais, tanto para frequência natural quanto para módulo de Young. É importante mencionar que os valores experimentais do módulo de Young são valores médios para os diferentes modos.

TABELA A3.2 - Módulo de elasticidade teórico e experimental.

N da viga	Frequência Teórica [Hz]	Frequência Exp. [Hz]	E Teórico $[N / m^2]$	E Exp. Médio $[N / m^2]$
1	39.267	40	$20 \cdot 10^{10}$	$20.146 \cdot 10^{10}$
	246.084	246		
	689.0417	680		
	1350.239	1282		
2	38.98	40	$20 \cdot 10^{10}$	$19.72 \cdot 10^{10}$
	244.32	240		
	684.12	662		
	1340.59	1282		
3	39.32	40	$20 \cdot 10^{10}$	$20.1 \cdot 10^{10}$
	246.43	246		
	690.01	682		
	1352.14	1316		
4	39.51	40	$20 \cdot 10^{10}$	$20.15 \cdot 10^{10}$
	247.59	246		
	693.28	686		
	1358.54	1332		
5	39.25	40	$20 \cdot 10^{10}$	$20.2 \cdot 10^{10}$
	246	246		
	688.82	682		
	1349.81	1316		
6	39.14	38	$20 \cdot 10^{10}$	$19.6 \cdot 10^{10}$
	245.28	244		
	686.79	680		
	1345.82	1308		
7	39.26	38	$20 \cdot 10^{10}$	$19.0 \cdot 10^{10}$
	246.05	238		
	688.94	662		
	1350.04	1276		
			$20.0 \cdot 10^{10}$	$19.85 \cdot 10^{10}$

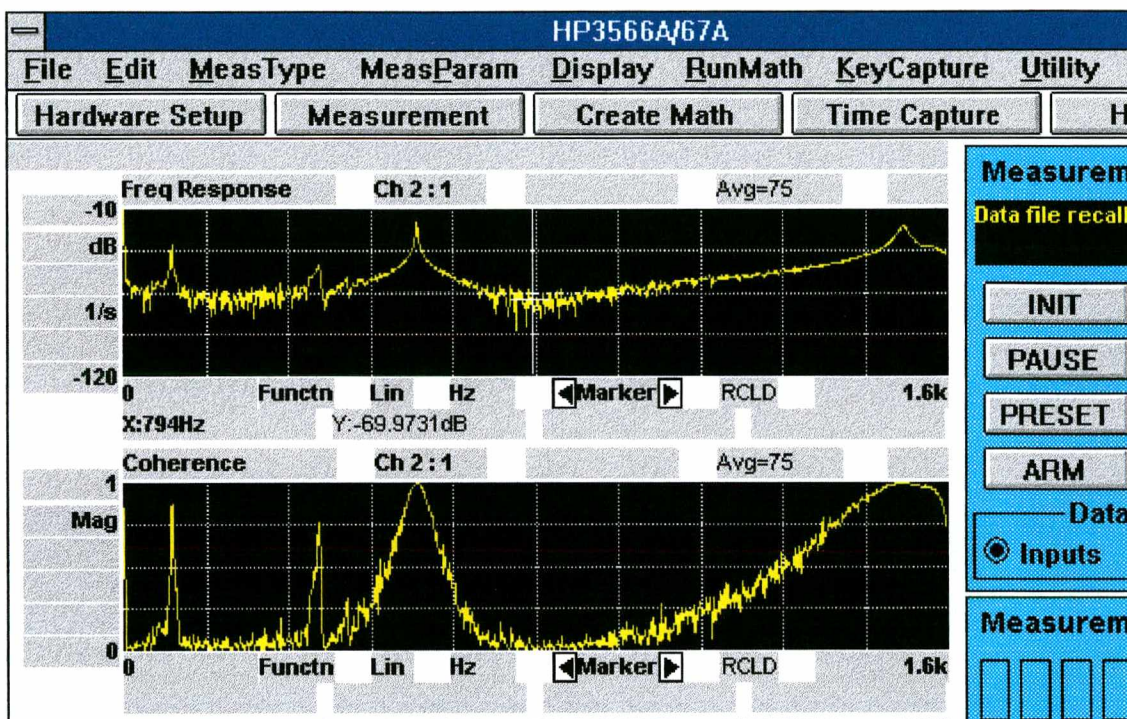
O erro médio relativo entre o módulo teórico e experimental foi, para as distintas frequências naturais e as distintas vigas, de 0.77 %. Tomou-se, assim, valores teóricos para o módulo de Young das lâminas metálicas.

As frequências naturais utilizadas na estimativa das características dinâmicas do material viscoelástico foram obtidas em forma experimental (ver tabela A3.2). Isto mostra que o uso de valores teóricos, neste caso, não leva a cometer grandes erros no que diz respeito às características das lâminas metálicas mencionadas anteriormente.

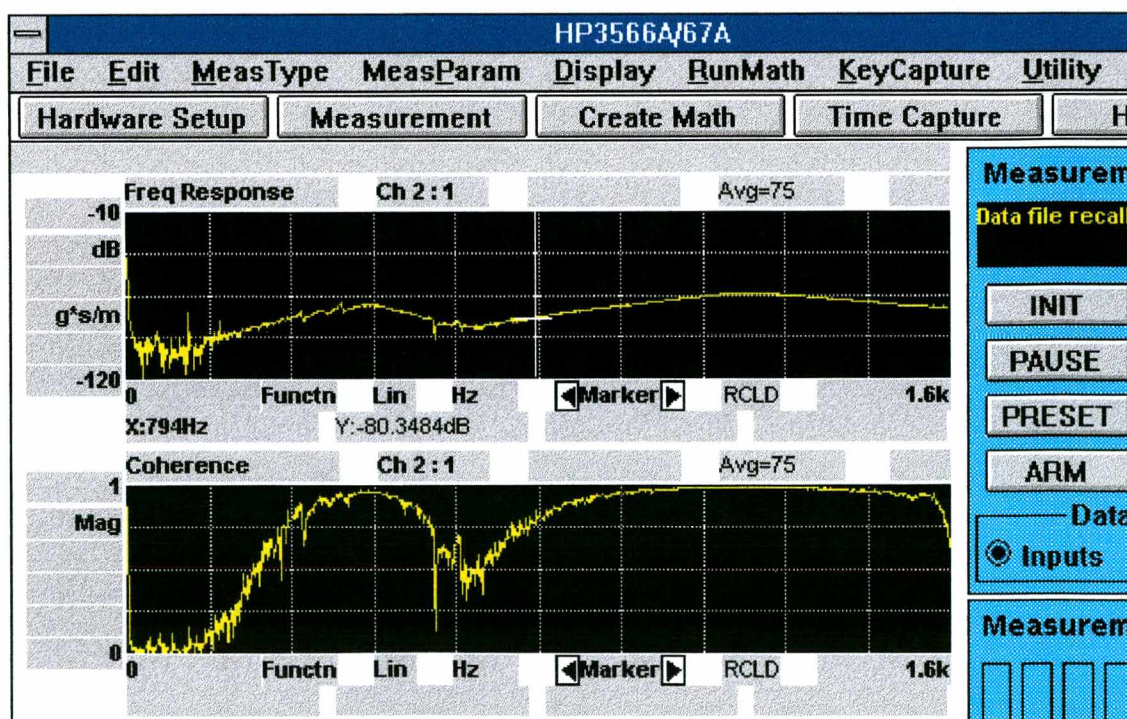


### A3.5 - Dados Experimentais da Viga Sanduíche

Os dados experimentais são obtidos a partir da resposta em frequência das vigas sanduíche medidas a diferentes temperaturas. Na figura A3.8 mostram-se, para a viga número 5, três curvas características deste tipo de ensaio a diferentes temperaturas.

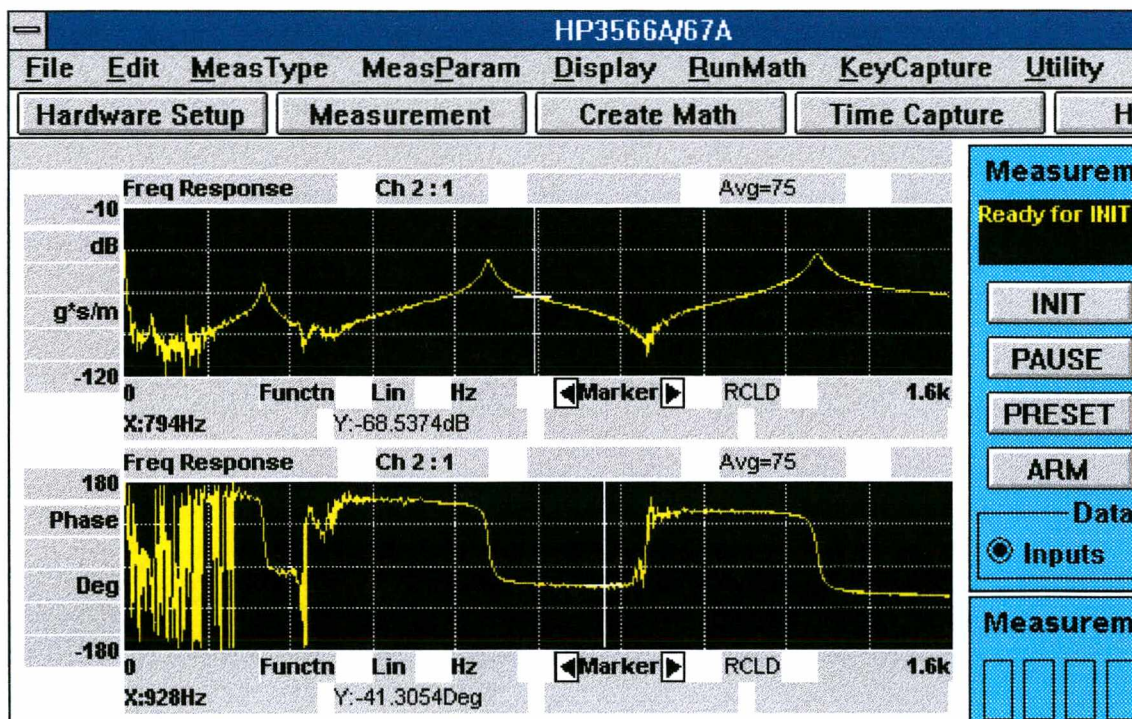


a) Temperatura 243 K



b) Temperatura 273 K





c) Temperatura 333 K

FIGURA A3.8 - Resposta em frequência da viga sanduíche, número 5

Para extrair os parâmetros modais a partir das curvas da figura A3.8 usou-se um “software” de análise modal adquirido pelo LVA (Laboratório de Vibrações e Acústica) chamado ICATS (Imperial College, Analysis, Testing and Software). Usou-se a opção IDENT e realizou-se uma análise modal clássica para sistemas com múltiplos graus de liberdade (Ewins, 1984). Neste caso, o interesse era apenas nas frequências naturais e nos fatores de perdas das vigas sanduíche.

Os resultados são mostrados nas tabelas A3.3 a A3.9 para as diferentes vigas (sete ao total).

Com esses parâmetros e os dados geométricos, estima-se o módulo dinâmico e fator de perda do material viscoelástico com ajuda das expressões (A3.3.1) e (A3.3.2). A frequência reduzida é obtida através do produto entre a frequência natural da viga sanduíche e o fator  $\alpha_T$  que, por sua vez, é função da temperatura  $T$  (tanto temperatura quanto frequência podem ser encontrados nas tabelas A3.3 a A3.9) e da temperatura de referência  $T_0$ , cuja escolha será explicada no item A3.6 (Ajuste de Curvas).

TABELA A3.3 - Parâmetros modais da viga sanduíche número 1, frequências naturais das lâminas metálicas associadas: (40 - 246 - 680 - 1310)

Número do Modos	Temperatura [°C]	Frequência Natural V.Oberst [Hz]	Frequência Natural V.S. [Hz]	Fator de perda V.S.
2	-30.0	246	548	0.0066
3	-30.0	680	1472	0.00776
2	-20.2	246	542	0.01181
3	-20.2	680	1448	0.01492
2	-10.0	246	534	0.02969
3	-10.0	680	1416	0.03638
2	0.0	246	512	0.078
3	0.0	680	1322	0.116
3	10.0	680	1000	0.258
2	19.9	246	316	0.18544
3	19.9	680	820	0.20180
2	30	246	298	0.07534
3	30	680	758	0.07527
4	30	1310	1398	0.05697
2	40	246	286	0.04896
3	40	680	732	0.04297
4	40	1310	1360	0.03360
2	50	246	278	0.04994
3	50	680	716	0.03752
4	50	1310	1344	0.02461
2	60	246	266	0.04489
3	60	680	698	0.02665
4	60	1310	1320	0.01997

TABELA A3.4 - Parâmetros modais da viga sanduíche número 2, frequências naturais das lâminas metálicas associadas: (40 - 240 - 662 - 1282)

Número do Modos	Temperatura [°C]	Frequência Natural V.Oberst [Hz]	Frequência Natural V.S. [Hz]	Fator de perda V.S.
2	-28.6	240	552	0.00569
3	-28.6	662	1462	0.00922
2	-20.0	240	548	0.00977
3	-20.0	662	1446	0.01453
2	-10.1	240	532	0.02844
3	-10.1	662	1384	0.04386
2	0.0	240	502	0.10160
3	0.0	662	1278	0.12882
3	10.0	662	1040	0.2788
2	20.1	240	336	0.15168
3	20.1	662	848	0.17705
2	30	240	319	0.06330
3	30	662	780	0.08237
4	30	1282	1454	0.07016
2	40.1	240	306	0.05253
3	40.1	662	760	0.04840
4	40.1	1282	1420	0.03876
2	50.1	240	298	0.04215
3	50.1	662	740	0.03624
4	50.1	1282	1382	0.03019
2	59.6	246	288	0.03944
3	59.6	662	726	0.033
4	59.6	1282	1356	0.02543

**TABELA A3.5 - Parâmetros modais da viga sanduíche número 3, frequências naturais das lâminas metálicas associadas: (40 - 246 - 682 - 1316)**

Número do Modos	Temperatura [°C]	Frequência Natural V.Oberst [Hz]	Frequência Natural V.S. [Hz]	Fator de perda V.S.
2	-28.3	246	568	0.00482
3	-28.3	682	1454	0.01092
2	-20.1	246	564	0.01226
3	-20.1	682	1428	0.01725
2	-10.4	246	556	0.01954
3	-10.4	682	1388	0.03316
2	0.0	246	504	0.14489
3	0.0	682	1220	0.1525
3	10.1	682	1028	0.2957
3	20.0	682	768	0.1879
2	30	246	284	0.13494
3	30	682	712	0.07146
4	30	1316	1356	0.06805
2	39.5	246	272	0.04845
3	39.5	682	698	0.03698
4	39.5	1316	1336	0.02774
2	50.5	246	268	0.04352
3	50.5	682	692	0.02742
4	50.5	1316	1328	0.02015
2	59.3	246	262	0.026
3	59.3	682	686	0.01812
4	59.3	1316	1320	0.01319

TABELA A3.6 - Parâmetros modais da viga sanduíche número 4, frequências naturais das lâminas metálicas associadas: (40 - 246 - 686 - 1332)

Número do Modos	Temperatura [°C]	Frequência Natural V.Oberst [Hz]	Frequência Natural V.S. [Hz]	Fator de perda V.S.
2	-30.9	246	566	0.084
3	-30.9	686	1478	0.00808
2	-23.0	246	566	0.00825
3	-23.0	686	1460	0.01273
2	-11.6	246	550	0.02676
3	-11.6	686	1400	0.04244
2	-1.4	246	520	0.08465
3	-1.4	686	1294	0.13454
3	10.1	686	1070	0.2617
3	19.1	686	838	0.2639
2	29.8	246	280	0.08473
3	29.8	686	730	0.07392
4	29.8	1332	1376	0.05191
2	39.8	246	274	0.05556
3	39.8	686	716	0.03541
4	39.8	1332	1352	0.02341
2	49.6	246	270	0.03804
3	49.6	686	706	0.02306
4	49.6	1332	1344	0.01615
2	59.4	246	266	0.03075
3	59.4	686	700	0.01573
4	59.4	1332	1334	0.01091



TABELA A3.7 - Parâmetros modais da viga sanduíche número 5, frequências naturais das lâminas metálicas associadas: (40 - 246 - 682 - 1316)

Número do Modos	Temperatura [°C]	Frequência Natural V.Oberst [Hz]	Frequência Natural V.S. [Hz]	Fator de perda V.S.
2	-29.1	246	570	0.00357
3	-29.1	682	1514	0.01042
2	-22.1	246	570	0.01061
3	-22.1	682	1504	0.01444
2	-10.6	246	558	0.02180
3	-10.6	682	1458	0.03721
2	0.0	246	474	0.17961
3	0.0	682	1214	0.28992
3	10.5	682	1016	0.3307
2	20.8	246	306	0.18426
3	20.8	682	688	0.23915
2	29.5	246	292	0.11127
3	29.5	682	746	0.10265
4	29.5	1316	1400	0.08702
2	38.2	246	282	0.06164
3	38.2	682	726	0.05039
4	38.2	1316	1372	0.04334
2	48.3	246	274	0.03097
3	48.3	682	710	0.02395
4	48.3	1316	1350	0.01758
2	57.5	246	268	0.03068
3	57.5	682	704	0.01571
4	57.5	1316	1340	0.01191

TABELA A3.8 - Parâmetros modais da viga sanduíche número 6, frequências naturais das lâminas metálicas associadas: (38 - 244 - 680 - 1308)

Número do Modos	Temperatura [°C]	Frequência Natural V.Oberst [Hz]	Frequência Natural V.S. [Hz]	Fator de perda V.S.
2	-26.0	244	556	0.00994
3	-26.0	680	1478	0.01668
2	-22.2	244	554	0.01331
3	-22.2	680	1468	0.02008
2	-11.1	244	528	0.0553
3	-11.1	680	1378	0.07958
2	-1.1	244	478	0.13475
3	-1.1	680	1220	0.27697
3	10.5	680	844	0.46332
2	19.1	244	282	0.18302
3	19.1	680	734	0.16149
4	19.1	1308	1416	0.12298
2	29.3	244	262	0.08614
3	29.3	680	700	0.05351
4	29.3	1308	1344	0.04874
2	38.5	244	258	0.04027
3	38.5	680	692	0.02814
4	38.5	1308	1330	0.02287
2	49.4	244	256	0.02225
3	49.4	680	686	0.01643
4	49.4	1308	1322	0.01248
2	59.3	244	254	0.02223
3	59.3	680	684	0.00987
4	59.3	1308	1314	0.00776

TABELA A3.9 - Parâmetros modais da viga sanduíche número 7, frequências naturais das lâminas metálicas associadas: (38 - 238 - 662 - 1276)

Número do Modos	Temperatura [°C]	Frequência Natural V.Oberst [Hz]	Frequência Natural V.S. [Hz]	Fator de perda V.S.
2	-29.6	238	470	0.00961
3	-29.6	662	1362	0.00775
2	-22.4	238	466	0.01265
3	-22.4	662	1346	0.01154
2	-11.9	238	446	0.02846
3	-11.9	662	1300	0.03531
3	-1.5	662	1216	0.09780
3	9.9	662	1060	0.22319
2	19.3	238	330	0.13565
3	19.3	662	874	0.27580
2	29.7	238	306	0.07480
3	29.7	662	786	0.10608
4	29.7	1276	1430	0.08582
2	39.7	238	296	0.04033
3	39.7	662	756	0.04608
4	39.7	1276	1386	0.03620
2	49.0	238	288	0.02910
3	49.0	662	738	0.03287
4	49.0	1276	1362	0.02294
2	57.4	238	284	0.02974
3	57.4	662	726	0.02579
4	57.4	1276	1346	0.01844

Na figura A3.9 mostram-se as nuvens de ponto obtidas da viga número 3. Importante notar que o módulo de cisalhamento  $G_0$  é obtido a partir do conhecimento de  $G$  e a relação (A3.1.1). Os gráficos estão em escala logarítmica.

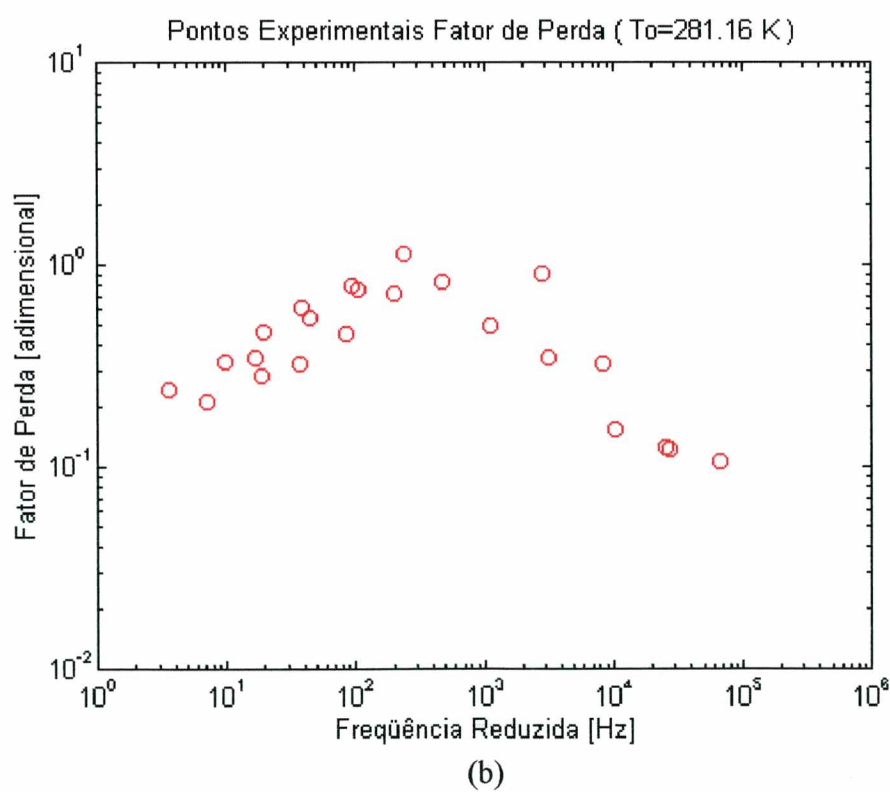
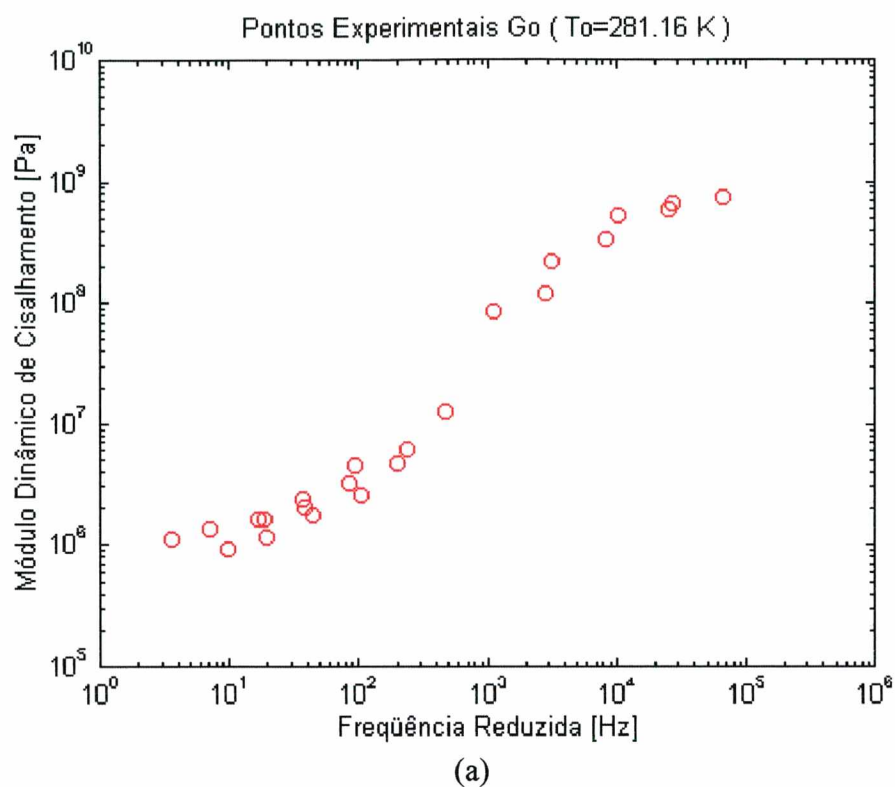


FIGURA A3.9 - Nuvens de pontos experimentais usando viga sanduíche: a) Módulo e cisalhamento b) Fator de perda

### A3.6 - Ajuste de Curvas

Uma vez que a nuvem de pontos for determinada, o próximo passo é ajustar a melhor curva possível que passe através desta (tanto para o módulo de cisalhamento quanto para o fator de perda), com o objetivo de utilizá-la quando as características dinâmicas do material viscoelástico forem requeridas. Isto será realizado minimizando a norma do erro entre a nuvens de pontos experimentais e uma função escolhida convenientemente, tanto para o módulo de cisalhamento quanto para o fator de perda. Certos parâmetros da função escolhida são avaliados e testados até que a norma do erro ou o erro médio quadrático seja o menor possível. Isto pode ser realizado em forma iterativa ou direta, dependendo do método usado.

As ferramentas matemáticas utilizadas para conseguir isto são:

- técnicas de otimização não linear
- conceitos de álgebra linear (solução de norma mínima, séries de Fourier).

#### A3.6.1 - Módulo Dinâmico de Cisalhamento

Como a nuvem de pontos a ser ajustada está em escala logarítmica, a função que fará isto ocorrer tem que ser logarítmica, também. No trabalho de Rogers e Nashif (1978), mostra-se que a utilização de  $G_0$  em lugar de  $G$  facilita o ajuste, evidenciando, de forma mais clara, a mínima dispersão conseguida com um  $T_0$  adequado.

Uma função que representa, de forma adequada, o ajuste para o módulo dinâmico dos materiais viscoelásticos, na região de transição e suas vizinhanças, é dada por Rogers e Nashif (1978):

$$Y_G = \ln G_0 = \ln G_L + \frac{2 \log \left( \frac{G_{FROG}}{G_L} \right)}{\left( 1 + \left( \frac{F_{ROG}}{F_R} \right)^N \right)} \quad \text{A3.6.1.1}$$

sendo

$$G_0 = \frac{T_0}{T} G \quad \text{considerando } \rho = cte \text{ (ver expressão A3.1.1).}$$

- $G_L$  = assíntota Inferior,
- $G_{FROG}$  = ponto de inflexão (ordenada),
- $F_{ROG}$  = ponto de inflexão (abscissa),
- $N$  = inclinação no ponto de inflexão,
- $F_R$  = frequência reduzida,
- $G_0$  = módulo de cisalhamento para temperatura de referência  $T_0$ ,
- $G$  = módulo de cisalhamento,
- $\ln$  = logaritmo em base e.



Na figura A3.10 mostra-se a curva utilizada para o ajuste do módulo de cisalhamento, dada pela expressão (A3.6.1.1). Observa-se, facilmente, a influência de cada um destes parâmetros na função  $Y_G$ .

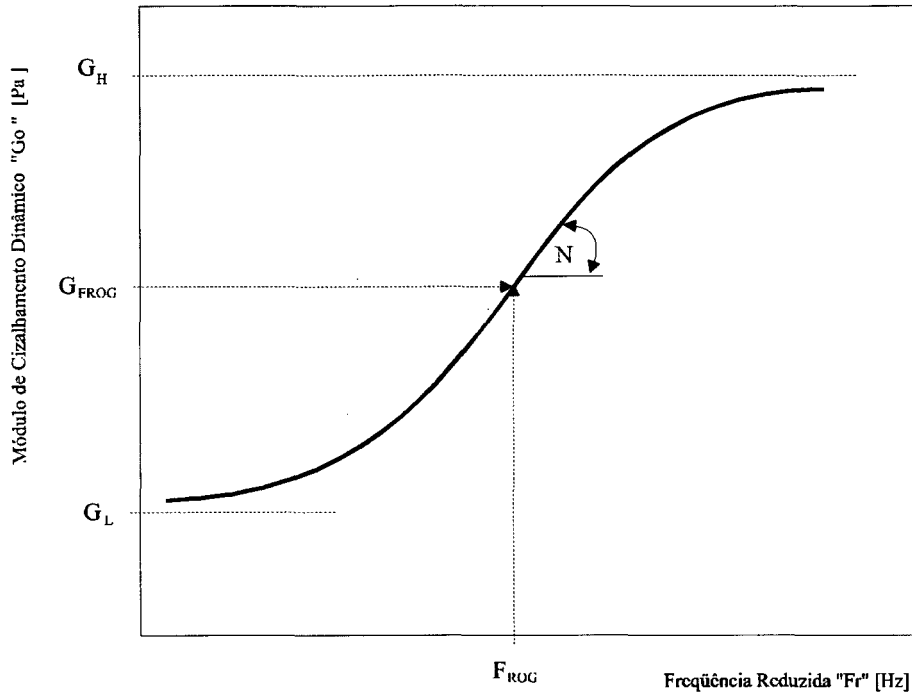


FIGURA A3.10 - Função de ajuste para o módulo de cisalhamento.

O processo iterativo de ajuste é realizado variando os parâmetros da função  $Y_G$  até que a norma do erro entre esta e a nuvem de pontos seja minimizada. Utilizam-se para isto, técnicas de otimização não linear que, de forma geral, podem ser apresentadas como:

$$\min F_{obj}(x) \quad \text{sendo } f: R^{nd} \rightarrow R$$

sujeita a:

A3.6.1.2

$$\begin{aligned} h_i(x) &= 0 & \text{com } i = 1 \text{ a } m_i \\ g_j(x) &> 0 & \text{com } j = m_i + 1 \text{ a } l \end{aligned}$$

sendo  $h_i$  e  $g_j$  as  $i$ -ésima e  $j$ -ésima restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente e  $x$  o vetor:

$$x = [G_L, G_{FROG}, F_{ROG}, N]^T, \quad \text{A3.6.1.3}$$

cujas componentes são os parâmetros da função  $Y_G$ . A função objetivo é dada por:

$$Fobj(x) = \|Y_G(x) - \ln(G_0)\|$$

ou

$$Fobj(x) = \sum_{i=1}^{NPE} \left( Y_{G_i}(x) - \ln(G_{0i}) \right)^2 \quad A3.6.1.4$$

onde

$NPE$  = número de pontos experimentais ( $F_R$ ),

$Y_{G_i}$  = pontos da função ( $NPE \times 1$ ),

$G_{0i}$  = nuvem de pontos a ser ajustada ( $NPE \times 1$ ).

### A3.6.1.1 - Técnicas de Otimização Não Linear

Foram implementadas duas técnicas de otimização não linear, sendo que uma delas, foi utilizada no programa geral para a otimização dos neutralizadores dinâmicos. Esta técnica utiliza informação da primeira derivada (gradiente) para a escolha da direção de busca. O método é conhecido como Método Quase Newton, já que esta direção encontra-se entre a direção do gradiente e a direção de Newton, que é a direção de busca mais eficiente (ver capítulo III).

A outra técnica implementada, conhecida como poliedro flexível e que não usa informação de derivada, consiste de um poliedro de  $nd + 1$  vértices, sendo  $nd$  a dimensão do problema. Esta técnica foi discutida no capítulo IV.

### A3.6.1.2 - Diagrama de Bloco e Escolha de $T_0$

O processo iterativo apresentado no item A3.6.1.1, tem como resultado o ponto ótimo para um dado  $T_0$  escolhido arbitrariamente. Segundo Rogers e Nashif (1981), um adequado valor inicial para a temperatura de referência  $T_0$  é na proximidade do valor máximo do fator de perda ou no ponto de inflexão do módulo de cisalhamento. Neste trabalho, o processo de otimização foi realizado para vários valores de  $T_0$  em torno desse ponto, com uma variação de 1 e 0.5 [K]. O melhor ajuste, mostrado na figura A3.13, foi para a temperatura de referência  $T_0 = 281.16$  [K], o qual provocou a mínima dispersão.

No presente, a implementação foi realizada diretamente no processo iterativo escolhendo a temperatura de referência que leva ao menor valor da função objetivo, ou, a temperatura que provocou a mínima dispersão entre a nuvem de pontos e a curva ajustada.

No diagrama de blocos mostrado na figura A3.11 pode-se observar, tanto o procedimento do processo iterativo de otimização para o ajuste da curva na nuvem de pontos, quanto a inclusão de um laço para a variação da temperatura de referência.

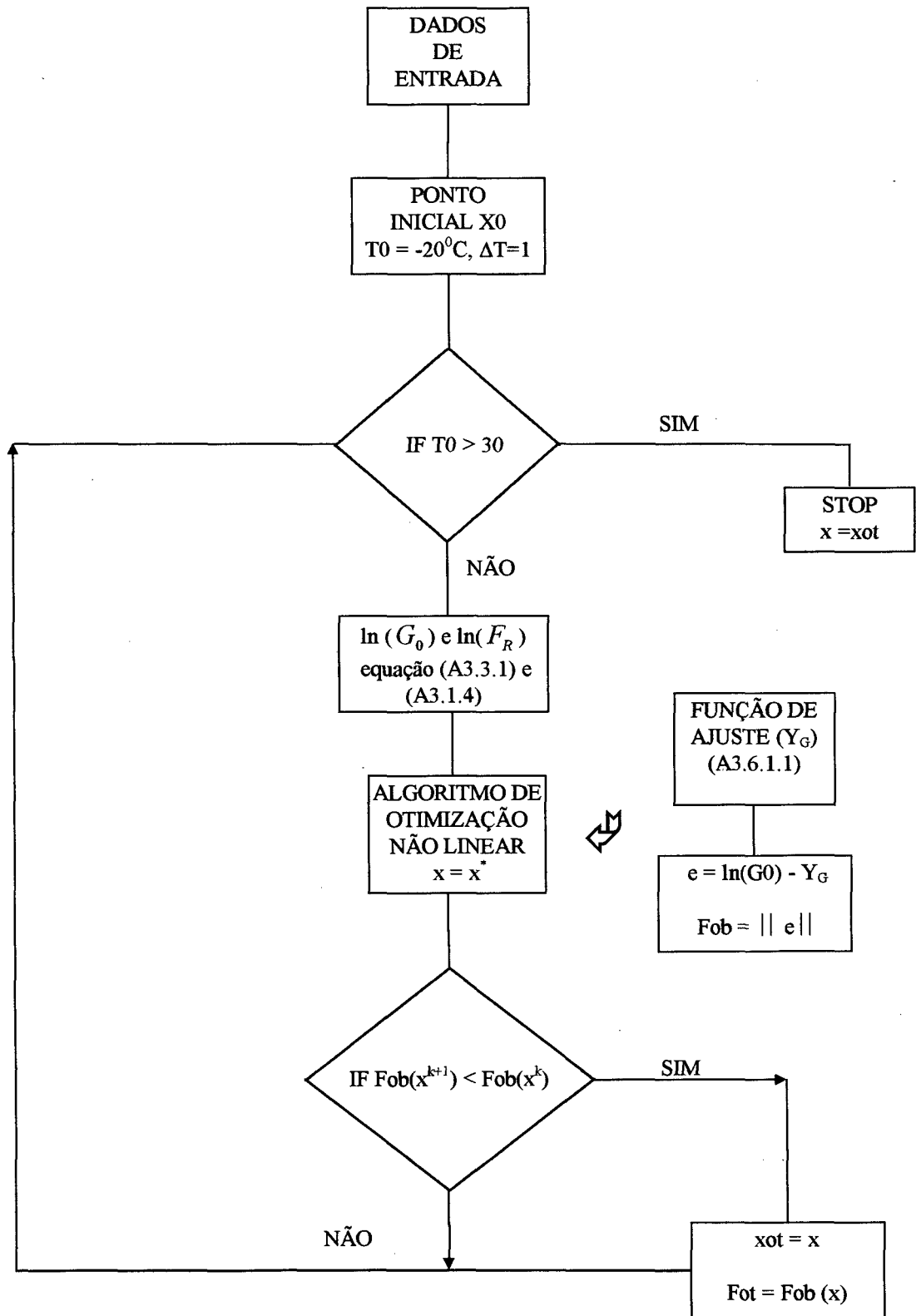


FIGURA A3.11 - Diagrama de blocos do processo de otimização: ajuste de curvas do módulo de cisalhamento e a escolha da temperatura de referência.

O resultado do ajuste do módulo de cisalhamento é apresentado na figura A3.13 juntamente com o fator de perda, em um nomograma onde constam, também, as variáveis temperatura e frequência.

### A3.6.2 - Ajuste do fator de Perda

Para o ajuste do fator de perda de materiais viscoelásticos na região de transição, Rogers e Nashif (1978), propõem uma função geral do tipo:

$$Y_{\eta} = \log \eta_G = \log \eta_{FROL} + \frac{C}{2} \left\{ (S_L + S_H) \frac{1}{C} \log \left( \frac{F_R}{F_{ROL}} \right) + (S_L - S_H) \left[ 1 - \sqrt{1 + \left( \frac{1}{C} \log \left( \frac{F_R}{F_{ROL}} \right) \right)^2} \right] \right\} \quad A3.6.2.1$$

Graficamente, as variações dos parâmetros estão representados na figura A3.12.

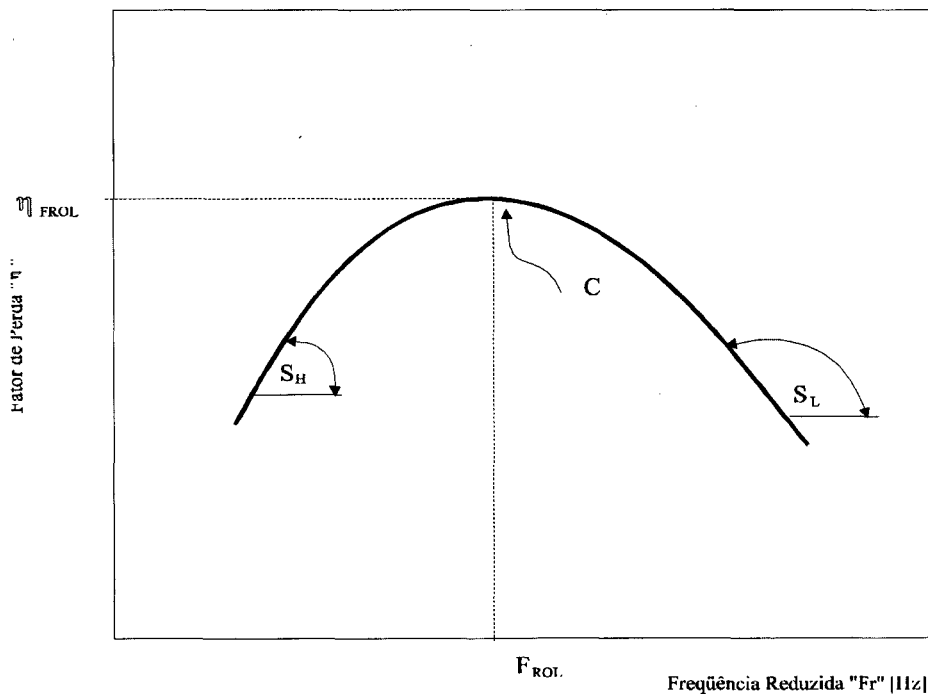


FIGURA A3.12 - Função a ajustar na nuvens de pontos produzida por o fator de perda.

Esta função é geral e se ajusta adequadamente quando os dados do material a ensaiar caem dentro da região de transição. No caso em que o fator de perda do material fique dentro da região de transição e na vizinhança da mesma é preciso contar com uma função que acompanhe os pontos fazendo assíntotas a diferentes alturas, antes e depois desta região. O uso deste tipo de curvas leva a um ajuste errôneo quando alguns pontos caem fora da região de transição.

Por esta razão propõe-se, neste trabalho, um ajuste por mínimos quadrados utilizando conceitos de álgebra linear.

Construi-se um polinômio de base:

- $F_R^n$  (deslocado ou não)
- $\cos(n F_R)$  com domínio  $[0, \pi]$
- $[cte., \sin(n F_R), \cos(n F_R)]$  ou séries de Fourier, com domínio  $[0, \pi]$

$n$  é a dimensão do espaço onde a solução é procurada.

Sendo  $\eta_G$  a nuvem de pontos experimental, contida no espaço  $NPE$ , pode-se encontrar uma solução em um subespaço através do conceito de projeção ortogonal ou de solução por norma mínima (Björk, 1991, Golub and Van Loan, 1989). O subespaço pode ser definido através de qualquer uma das bases apresentadas acima. Tomando o caso mais geral de bases formada por senos e cosenos, representando uma série de Fourier, pode-se aproximar a nuvem de pontos através de:

$$\eta_G \approx a_0 + \sum_{i=1}^{NG} a_i \cos\left(\frac{n\pi}{T}(F_R - F_{R_1})\right) + \sum_{i=1}^{NG} b_i \sin\left(\frac{n\pi}{T}(F_R - F_{R_1})\right) \quad A3.6.2.2$$

sendo  $T = F_{R_{NPE}} - F_{R_1}$

$F_{R_1}$  = frequência reduzida inferior,

$F_{R_{NPE}}$  = frequência reduzida superior.

Em forma matricial:

$$A x = b = \eta_G \quad A3.6.2.3$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{T}(F_{R_1} - F_{R_1})\right) & \dots & \cos\left(\frac{n\pi}{T}(F_{R_1} - F_{R_1})\right) & \sin\left(\frac{\pi}{T}(F_{R_1} - F_{R_1})\right) & \dots & 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{T}(F_{R_2} - F_{R_1})\right) & \dots & \cos\left(\frac{n\pi}{T}(F_{R_2} - F_{R_1})\right) & \sin\left(\frac{\pi}{T}(F_{R_2} - F_{R_1})\right) & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos\left(\frac{\pi}{T}(F_{R_{NPE}} - F_{R_1})\right) & \dots & \cos\left(\frac{n\pi}{T}(F_{R_{NPE}} - F_{R_1})\right) & \sin\left(\frac{\pi}{T}(F_{R_{NPE}} - F_{R_1})\right) & \dots & 1 \end{bmatrix}$$



$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{NG} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{NG} \\ a_0 \end{bmatrix} \quad \eta_{G(NPE,1)} \text{ pontos experimentais.}$$

Resolver este problema por mínimos quadrados ou norma mínima é uma escolha que depende das características da matriz  $A$ .

Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$  com  $m > n$ .

- Se  $A$  é uma matriz “full rank”, ou seja, o “rank” de  $A$  é  $n$ , então a expressão (A3.6.2.3) pode ser resolvida como:

$$A^T (A x) = A^T Y$$

$$x = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

O produto  $A^T A$  pode propagar ruído como mostra o Golub and Van Loan (1989). Por outro lado se  $A$  é uma matriz “rank” deficiente ou seja o  $\text{rank}(A) < n$ :  $A^T A$  será mal condicionada e a sua inversa será calculada em forma errônea.

- Assim, outra forma de achar uma solução é através de norma mínima, utilizando SVD (Singular Value Decomposition):

$$A_{m,n} = U_{m,m} S_{m,n} V_{n,n}^T,$$

sendo  $U$  e  $V$  matrizes ortogonais e  $S$  uma matriz diagonal cujas elementos são chamados valores singulares.

A solução será dada por:

$$x^+ = A^+ \eta_G$$

onde:

$$A^+ = V S^{-1} U^T$$

$x^+$  é conhecida por solução de norma mínima e é uma das infinitas soluções do problema.

A tabela A3.10 mostra a relação entre o erro relativo para as distintas bases e ordem das mesmas. Deve-se observar que para compará-las, uma ordem 4 para a base de cossenos é

equivalente a uma 8 para Série de Fourier, uma vez que esta é formada por senos e cossenos e a nuvens de pontos é uma função praticamente par.

TABELA A3.10 - Comparação entre as distintas bases para o ajuste do fator de perda.

Ordem	Erro Relativo		
	Base $X^n$	Base cossenos	Base Fourier
4	0.1069	0.095	0.0996
5	0.0977	0.0938	-
6	0.0891	0.0876	0.0879
7	0.0876	0.0774	-
8	0.0870	0.0770	0.0876

O resultado do ajuste para o fator de perda é apresentado na figura A3.13. Este é colocado em escala logarítmica, tanto em abscissa como ordenada. Como explicado anteriormente foi criado um nomograma para uma leitura direta das características do material ensaiado.

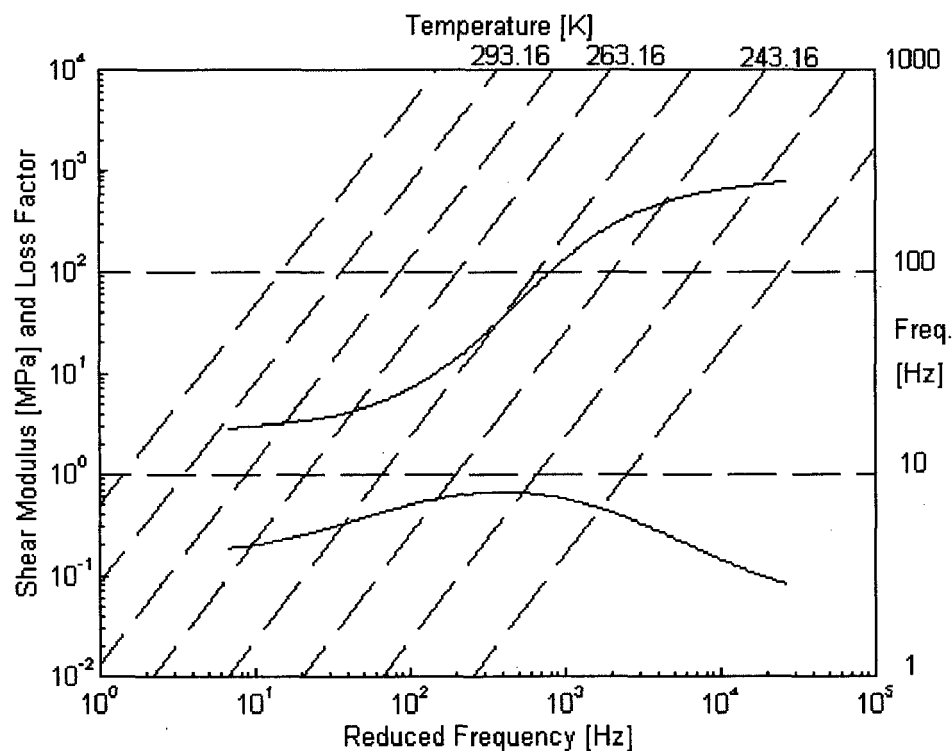


FIGURA A3.13 - Nomograma do material elastomérico Dyad 601 ensaiado no LVA.

A figura A3.13 contém as características dinâmicas médias do material viscoelástico ensaiado. Isto é, os ajustes apresentados nos itens anteriores, tanto do módulo de cisalhamento quanto do fator de perda, são realizados para cada viga sanduíche, tomando-se finalmente um valor médio.

É importante esclarecer que a apresentação do nomograma não está sendo feita como a norma ISO 10112 de 1991 (BS 7544 : 1991) especifica. Nesta, linhas isotérmicas são contínuas apenas na região onde os pontos experimentais foram medidos e, tracejadas, na extrapolações

para que quando o leitor fizer uso da mesma, saiba que esses pontos são menos confiáveis que aqueles que estão na região medida.

Outro ponto a considerar é que os ajustes, neste caso, foram feitos de forma independente, no que diz respeito ao módulo de cisalhamento e fator de perda. Pode acontecer que o ponto de máxima amplitude do fator de perda e o ponto de inflexão do módulo de cisalhamento não coincidam. Se isto for necessário, por alguma razão, pode ser solucionado facilmente quando, por exemplo, utiliza-se uma base de polinômios. Estes poderiam estar deslocados no ponto onde um ajuste prévio para o módulo dinâmico tenha definido o valor de  $F_{ROG}$ . Este ponto ainda está em discussão, pois se poderia forçar uma tendência em detrimento das reais características do material a ensaiar.

As curvas encontradas cumpriram o objetivo que foi proposto no início, ou seja, conhecer o comportamento do material que seria posteriormente utilizado na construção dos neutralizadores dinâmicos, alvo principal desta tese.

# **ANEXO 4**

**ARQUIVOS DE COMANDOS DO  
ANSYS 5.0 - CÁLCULO DA  
DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA**

**ANEXO 4: ARQUIVO DE COMANDOS DO NASYS 5.0 - CÁLCULO DA DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA**

```
/TITLE, Cálculo da distribuição de temperatura do neutralizador
/UNITS, SI
/FILNAM, tempsai
/PREP7
ET, 1,90
ET, 2,90
ET, 3,90
! Características térmicas do alumínio
MP,DENS,1,2702
MP,KXX,1,237
MP,C,1,903
! Características térmicas do material viscoelástico
MP,DENS,2,1130
MP,KXX,2,0.13
MP,C,2,2010
! Características térmicas do aço
MP,DENS,3,7854
MP,KXX,3,60.5
MP,C,3,434
K,1,0,0,0
K,2,0,0.002,0
K,3,0.01,0.002,0
K,4,0.01,0.0045,0
K,5,0.02,0.0045,0
K,6,0.02,0.002,0
K,7,0.02,0,0
K,8,0.01,0,0
K,9,0.01,0.00675,0
K,10,0.02,0.00675,0
K,11,0.01,0.01175,0
K,12,0.02,0.01175,0
A,1,8,3,2
A,8,7,6,3
A,3,6,5,4
A,4,5,10,9
A,9,10,12,11
VROTAT,1,2,3,4,5,,1,7,,6
/view,1,1,1,1
vplot
! Gerando os nós e os elementos
esize,,3
mat,1
type,1
vmesh,1,26,5
vmesh,2,27,5
vmesh,3,28,5
```



```
mat,2
type,2
vmesh,9,29,10
mat,3
type,3
vmesh,5,30,5
! Criando a falta de material viscoelástico para dissipação de calor
vdele,4
vdele,14
vdele,24
epplot
finish
! Solução do problema de transferência de calor
/SOLU
antype, static
nropt, auto
! Coeficiente de película do ar para convecção
! ***** Anel de fora *****
asel,s,area,,22,98,19
asel,a,area,,113
! ***** Tampa traseira*****
asel,a,area,,23,99,19
asel,a,area,,114
asel,a,area,,19,95,19
asel,a,area,,111
asel,u,area,,19,95,38
asel,a,area,,15,91,19
asel,a,area,,108
! ***** Eixo de alumínio *****
asel,a,area,,7,102,19
! ***** Tampa do eixo *****
! asel,a,area,,8,103,19
! ***** Tampa da frente*****
asel,a,area,,21,97,19
asel,a,area,,112
asel,a,area,,36,74,38
asel,a,area,,109
asel,a,area,,13,89,19
asel,a,area,,106
asel,a,area,,10,86,19
asel,a,area,,104
!sfa,all,,conv,20,0.
sfa,all,,conv,5,0.
asel,all
! ***** Buraco do meio *****
asel,s,area,,4,14,10
asel,a,area,,18,20,2
asel,a,area,,39
asel,a,area,,52
```

---

```
asel,a,area,,56,58,2
asel,a,area,,77
asel,a,area,,90,94,4
asel,a,area,,96
!sfa,all,,conv,5,0.
sfa,all,,conv,3,0.
asel,all
! Calor gerado no elastômero em [Watt/m3]
esel,s,type,,2
BFE,all,hgen,,15531
esel,all
! Cálculo da distribuição de temperatura quando existe
! uma diferença da mesma no neutralizador
! nsel,x,0
! d,all,temp,400.0
! nsel,all
solve
fini
```